L3 MAPES — Topologie
2010-11
Examen final, 3 janvier 2011

On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée. Aucun point ne sera attribué à une réponse seulement partiellement correcte.

1. Question de cours. Soit E un espace de Hilbert et soit $K \subset E$ convexe non vide. Montrer que pour tout $x \in E$, l'élément y de K qui réalise la distance de x à K (qu'on appelle la projection de x sur K) est unique. (On ne demande pas de montrer l'existence de y, seulement son unicité.)

2. Exercice. Soit E un espace de Hilbert, soit V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $(V^\perp)^\perp \supset V$.
2. Montrer que l'adhérence $\overline{V}$ de V est contenue dans $(V^\perp)^\perp$.
3. Montrer que $(V^\perp)^\perp \subset \overline{V}$. (*Indication.* On pourra considérer un point $x \notin \overline{V}$, puis le projeté orthogonal y de x sur $\overline{V}$).

3. Exercice. Soit (X, d) un espace métrique compact. On note $L^\infty(X)$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$, et D la fonction de $L^\infty(X) \times L^\infty(X)$ dans $\mathbb{R}$ qui à (f, g) associe

$$D(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| .$$

1. Montrer que D est bien définie, puis que $(L^\infty(X), D)$ est un espace métrique.
2. A chaque $x \in X$ on associe la fonction $d_x : X \to \mathbb{R}$ définie par $d_x(y) = d(x,y)$ pour tout $y \in X$. Montrer que, pour tout $x \in X$, $d_x \in L^\infty(X)$.
3. Montrer que l'application de X dans $L^\infty(X)$ qui à x associe d_x préserve la distance.
4. Cette application est-elle injective ? Surjective ?

4. Exercice. Soit E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, définies, continues et dérivables sur $[0, 1]$ et vérifiant $f(0) = 0$. On définit sur cet espace deux fonctions N_1 et N_2 à valeurs réelles comme suit :

$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.
2. Montrer que $N_1(f) \leq N_2(f)$ pour tout $f \in E$. En déduire que l'application identité de (E, N_2) dans (E, N_1) est continue.
3. A l'aide des fonctions $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, montrer que l'application identité de (E, N_1) dans (E, N_2) n'est pas continue.