L3 MAPES — Topologie
2010-11
Examen partiel, 27 octobre 2010

On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée. Aucun point ne sera attribué à une réponse seulement partiellement correcte.

1. Question de cours. Enoncer l'inégalité de Minkowski dans $\mathbb{R}^n$, et la démontrer en supposant connus les résultats précédents du cours.

2. Exercice. 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Montrer rigoureusement, en se ramenant à la définition, que la fonction composée $\tanh \circ f$ a une limite qu'on précisera en $+\infty$.

2. Soit maintenant g une fonction qui tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Que peut-on dire de la limite de $g \circ f$ en $+\infty$?

3. Exercice. 1. Montrer que le produit de deux suites bornées est bornée.

2. Montrer qu'une suite qui admet une limite finie en $+\infty$ est bornée.

4. Exercice. On considère l'ensemble L des suites réelles de carré sommable, c'est-à-dire telles que $\sum_n u_n^2 < \infty$.

1. Montrer que les expressions :

$$d_2((u_n), (v_n)) = \left(\sum_n (v_n - u_n)^2 \right)^{1/2}$$

et

$$d_\infty((u_n), (v_n)) = \sup_n |v_n - u_n|$$

déterminent des distances sur L.

2. Montrer que pour tout $U, V \in L$ on a $d_2(U, V) \geq d_\infty(U, V)$.

3. On considère la suite $U^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par $u_k^n = 1/n$ si $k < n^2$ et par $u_k^n = 0$ si $k \geq n^2$. Quelle est la limite de (U^n) pour d_∞ ?

4. Montrer que (U^n) n'a pas de limite pour d_2.

5. Est-ce que d_2 et d_∞ sont équivalentes ?