M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Examen final, 6 janvier 2011
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Hessien et courbure. On considère une courbe $\gamma : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ paramétrée à vitesse constante et une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ régulière. On notera $Hess_0(f)$ la hessienne de f.

(1) Donner une expression de la dérivée seconde de $f \circ \gamma$, faisant intervenir la hessienne de f, et la courbure de γ.

(2) En déduire (où bien démontrer directement) que si $\gamma(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})$ est l'ensemble des points où f s'annule, alors la courbure de γ en t vérifie :
$$k(t)df(N(t)) = -(Hess_0 f)(\gamma'(t), \gamma'(t)) ,$$
où $N(t)$ est le vecteur normal unitaire à γ en $\gamma(t)$.

(3) On considère maintenant une surface orientée $S \subset \mathbb{R}^3$, et une fonction $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ régulière dont on note $Hess_0(F)$ la hessienne. Si $g : S \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière, on notera $Hess(g)$ sa hessienne (sur S). Montrer que la seconde forme fondamentale de S vérifie :
$$Hess(F_{|S}) = Hess_0(F) + dF(N)II ,$$
où N est la normale unitaire à S et II est sa seconde forme fondamentale.

NB : on rappelle que la hessienne d'une fonction définie sur une surface S est donnée par
$$Hess(g)(u, v) = I(D_u Dg, v) ,$$
où Dg est le gradient de g et D dénote la connexion de Levi-Civita de la métrique induite sur S.

2. Courbes tracées sur une surface. On considère une surface orientée $S \subset \mathbb{R}^3$, et une courbe régulière $\gamma : I_0 \to S$ paramétrée à vitesse unité. On note D la connexion de Levi-Civita de la métrique induite I de S, J la rotation de $\pi/2$ des vecteurs de TS pour I, et on appelle k la courbure géodésique de γ, dont on rappelle qu'elle est définie par
$$k(t) = I(D_{\gamma'}\gamma', J\gamma') .$$
On notera k_0 et t_0 la courbure et la torsion de γ, considérée comme une courbe dans l'espace.

(1) Montrer que
$$\gamma''(t) = D_{\gamma'}\gamma' + II(\gamma', \gamma')N ,$$
où N est le champ de vecteurs normal unitaire à S.

(2) En déduire une expression de k_0 faisant intervenir k et II.

(3) On suppose maintenant que γ est une géodésique de la métrique induite de S. Exprimer sa torsion t_0 en fonction de II et de γ'.

3. Un théorème de Hilbert. Dans cette partie, on veut montrer qu'il n'existe pas de plongement $\psi : D^2 \to \mathbb{R}^3$ du disque unité D^2 de $\mathbb{R}^2$ dans l'espace euclidien tel que la métrique induite sur D^2, soit I, soit complète et à courbure constante $K = -1$. On va raisonner par l'absurde et supposer l'existence d'un tel plongement. On appelle S son image, qui est donc une surface de $\mathbb{R}^3$, on notera B l'opérateur de Weingarten de S.

On rappelle la formule de Gauss-Bonnet polygonale : si (S, g) est une surface munie d'une munie d'une métrique riemannienne, et si $D \subset S$ est un ouvert homéomorphe à un disque à bord régulier par morceaux, alors
$$\int_{\partial D} kds + \sum_i (\pi - \theta_i) = 2\pi - \int_D Kda ,$$
où k est la courbure géodésique de ∂D, les θ_i sont les angles intérieurs de D aux points où le bord n'est pas régulier, et K est la courbure de S.

3.1. Montrer qu'il existe en tout point du disque unité deux vecteurs U et V, unitaires pour I, tels que :

$$BU = JU \ , BV = -JV \ .$$

Ici J est l'opérateur défini sur chaque espace tangent par "rotation d'angle $\pi/2$". Dans la suite, on admettra que U et V peuvent être définis globalement, c'est à dire sur tout D^2 (ceci suit du fait que S est simplement connexe).

3.2. En utilisant l'équation de Codazzi, montrer qu'on a :

$$B(D_U V - D_V U) = -J(D_U V + D_V U) \ ,$$

où D est la connexion de Levi-Civita de I et J est la rotation d'angle $\pi/2$ pour I. (On rappelle que $D_X(JY) = JD_X Y$).

3.3. En étudiant l'action de l'endomorphisme JB sur chaque espace tangent, en déduire qu'on a :

$$D_U V = D_V U = 0 \ .$$

3.4*. Montrer que, au voisinage de chaque point $m \in S$, il existe une paramétrisation locale $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$ d'un voisinage de m dans S, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, telle que :

$$U = \partial_x u \ , \quad V = \partial_y u \ .$$

(On pourra utiliser le fait que $[U, V] = 0$ pour montrer que le flot obtenu en intégrant U commute avec le flot obtenu en intégrant V).

3.5*. Montrer qu'on a en fait une paramétrisation globale $u : \mathbb{R}^2 \to S$ ayant cette propriété. (Cette question, plus délicate, pourra être admise).

3.6. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on appelle $\Omega_{x,y}$ l'image par u dans S du rectangle $[-x, x] \times [-y, y]$ de $\mathbb{R}^2$. En utilisant U et V, donner une majoration de la courbure géodésique totale du bord de $\Omega_{x,y}$.

3.7*. Montrer que l'aire de D^2 pour la métrique I est nécessairement infinie, et conclure que ψ ne peut exister. (NB : on admettra le théorème de Cartan-Hadamard, d'après lequel pour une surface complète S à courbure $K \leq 0$ et pour un point $x \in S$, l'application exponentielle en x est un difféomorphisme (global) de $T_x S$ sur S.)