M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Examen partiel, 10 novembre 2011
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction ! Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Etude d'une courbe plane. On considère l'application γ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\gamma(t) = (t, t^2)$.

(1) Montrer que γ est une courbe paramétrée.

(2) Déterminer la vitesse de γ, son vecteur tangent unitaire et son vecteur normal unitaire.

(3) Déterminer la courbure de γ. Quelle est sa courbure totale ? (On rappelle que la courbure totale d'une courbe paramétrée est l'intégrale de $k(t)v(t)$.)

2. Courbes convexes dans le plan. Soit $c : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ une courbe simple convexe paramétrée à vitesse unité. On note Ω l'intérieur de c.

(1) Montrer que pour tout $r > 0$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ à distance r de Ω est une courbe qu'on notera C_r. Montrer que pour tout $s \in \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$, il existe un unique point de C_r dont le projeté orthogonal est $c(s)$. On notera ce point $c_r(s)$.

(2) Montrer que l'application de $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à s associe $c_r(s)$ est une paramétrisation de C_r. Déterminer en chaque point sa vitesse, son vecteur tangent unitaire et son vecteur normal unitaire en fonction de quantités correspondantes pour c.

(3) Déterminer la courbure de c_r en s (toujours en fonction de quantités définie pour c).

(4) Déterminer pour tout $r > 0$ la longueur et la courbure totale de C_r.

(5) Application : on suppose que la longueur de l'équateur est de 40000km. On envisage de construire le long de l'équateur une barrière de 1m de haut. Quelle serait la longueur du bord supérieur de la barrière ?

3. Etude d'une courbe dans l'espace.

(1) Soit $c : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, et soit $c_\lambda = H_\lambda \circ c$, où H_λ est l'homothétie de centre 0 et de rapport $\lambda > 0$. Exprimer la vitesse, la courbure et la torsion de c_λ en fonction de celles de c.

(2) On considère l'application γ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ qui à t associe $\gamma(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t), e^t)$. Montrer que pour tout $T > 0$, il existe une isométrie U de $\mathbb{R}^3$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \gamma(t + T) = U \circ H_\lambda(\gamma(t))$$

pour un λ qu'on déterminera.

(3) Déterminer la courbure et la torsion de γ.

4. Surfaces convexes. Soit Ω un domaine compact convexe à bord régulier de $\mathbb{R}^3$, soit S son bord, qui est donc une surface S de $\mathbb{R}^3$. Pour tout $r > 0$, on note S_r l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ à distance r de Ω.

(1) Montrer que pour tout $r > 0$, S_r est une surface.

(2) On note $\phi_r : S_r \to S$ l'application qui à un point de S_r associe le point le plus proche de S. Montrer que ϕ_r est bijective.

(3) Montrer que l'inverse de ϕ_r, soit $\psi_r : S \to S_r$, est différentiable, et donner une expression de sa différentielle.

(4) Déterminer le vecteur normal unitaire à S_r en $\psi_r(x)$, soit $N_r(x)$, en fonction du vecteur normal unitaire à S en x, soit $N(x)$.

(5) Soit $x \in S$ et soient $u, v \in T_xS$. Soient $x_r = \psi_r(x), u_r = d\psi_r(u), v_r = d\psi_r(v)$. Exprimer la métrique induite de S_r et sa seconde forme fondamentale, prises sur (u_r, v_r), en fonction de quantités définies pour S sur (u, v).