M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Feuille de TD no 1

1. On considère les courbes paramétrées suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.
   (1) $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$,
   (2) $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$, $a, b > 0$,
   (3) $t \mapsto (\cosh(t), \sinh(t))$,
   (4) $t \mapsto e^t(\cos(t), \sin(t))$.

Vérifier dans chaque cas que c'est une courbe régulière paramétrée, calculer sa vitesse et sa courbure, identifier la courbe obtenue.

2. Soit $c : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, de vitesse v et de courbure k. Soit c_λ l'image de c par l'homothétie de rapport λ. Quelle sont la vitesse et la courbure de c_λ ?

3. Caractériser les courbe du plan dont la courbure est constante.

4. Pour chacune des applications suivantes déterminer ses points singuliers. Pour les points réguliers, calculer la vitesse et la courbure.
   (1) $c(t) = (t^3 + 3t^3 + 3t, t^2 + 2t)$,
   (2) $c(t) = (-1, 3)$,
   (3) $c(t) = (t^2, t^4 + t^5)$,
   (4) $c(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t))$.

5. Pour $\lambda, \mu > 0$ on considère l'application de $\mathbb{R}$ dans le plan donnée par $t \mapsto (\cos(t) + \mu\sin(\lambda t), \sin(t) + \mu\cos(\lambda t))$. Existe-t-il des valeurs des paramètres pour lesquels c'est une courbe paramétrée ?

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t) + t$.
   (1) Montrer qu'on peut déduire de g une fonction de S^1 dans S^1.
   (2) Quel est son degré ?

7.*. Soit $c : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple paramétrée à vitesse unité. On note Ω le domaine relativement compact bordé par c. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.
   (1) la courbure de c est de signe constant ($k \geq 0$ partout ou $k \leq 0$ partout),
   (2) c reste d'un seul coté de ses tangentes,
   (3) deux points de Ω sont joints par un segment dans Ω,
   (4) l'intersection de Ω avec une droite est un intervalle.

Si ces propriétés sont satisfaites on dira que c est *convexe*.

8.*. On considère une courbe fermée simple régulière paramétrée dans le plan, soit $c : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$. On suppose que c est paramétrée à vitesse 1, et on note $\nu(s)$ le vecteur normal unitaire en $c(s)$, qu'on suppose orienté du coté intérieur de c, et $k(s)$ sa courbure au point $c(s)$, définie en réference à ν.

8.1. Pour tout $r > 0$, on note :

$$c_r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}/L\mathbb{Z} & \to & \mathbb{R}^2 \\ s & \mapsto & c(s) - r\nu(s) \end{array} .$$

Montrer que, pour r assez petit, c_r est une courbe simple paramétrée. Montrer que, si c est convexe, alors c_r est une courbe simple paramétrée pour tout $r > 0$.

8.2. En supposant c convexe, exprimer la vitesse et la courbure de c_r en chaque point. Exprimer l'aire du domaine borné par c_r en fonction de r et de quantités relatives à c.

8.3. On considère maintenant la courbe c_r définie comme plus haut, mais pour $r < 0$. On suppose que c est convexe, et de courbure partout au plus k_0. Montrer que, pour $0 > r > -1/k_0$, c_r est une courbe fermée simple paramétrée.

8.4. En déduire que, sous ces hypothèses, le domaine compact borné par c contient une boule ouverte de rayon $1/k_0$.