M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Feuille de TD no 2

1. Soit $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ une application continue, soit x_0 un point de $\mathbb{R}^2$ qui n'est pas dans $f(S^1)$. Pour tout $t \in S^1$, on note $c(t) = (f(t) - x_0)/\|f(t) - x_0\|$.

1. Montrer que ceci définit une fonction continue de S^1 dans S^1.

2. On définit $ind_{x_0}(f)$ comme le degré de c. Montrer que cette quantité peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{Z}$.

3. Montrer que $ind_{x_0}(f)$ est constant lorsqu'on déplace x_0 dans le complémentaire de $f(S^1)$. (On donnera d'abord un sens précis à cette assertion.)

4. Montrer que $ind_{x_0}(f)$ est constant lorsqu'on déforme f dans le complémentaire de x_0. (On donnera là aussi un sens précis à cette assertion.)

2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (e^t, t, t^2)$. Montrer que c'est une courbe paramétrée et déterminer le plan osculateur en $t = 1$ puis en $t = 0$.

3. Montrer que pour une courbe paramétrée à vitesse constante dans $\mathbb{R}^3$, l'accélération est perpendiculaire à la vitesse.

4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$. Montrer que c'est une courbe paramétrée puis déterminer son repère de Frénet.

5. Soit $c : I \to \mathbb{R}^3$, et soit $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur le plan horizontal d'équation $z = 0$. Exprimer la courbure de $\pi \circ c$ en t en fonction de la courbure de c en t et d'autres quantités géométriques qu'on déterminera.

6. Caractériser les courbes de $\mathbb{R}^3$ dont la courbure et la torsion sont constantes (et la courbure est non nulle).