M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Feuille de TD no 3

1. Soient X et Y deux champs de vecteurs réguliers sur $\mathbb{R}^3$.

(1) Soit $m \in \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ contenant 0, un voisinage U de m et une famille à un paramètres $(\phi_t)_{t\in I}$ telle que pour tout t, ϕ_t est un difféomorphisme local de U dans $\mathbb{R}^3$ et que, pour tout $t \in I$ et tout $p \in U$,
$$\phi_0(p) = p \ , \quad \frac{d\phi_t(p)}{dt} = X(\phi_t(p)) \ .$$

(2) On pose
$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d\phi_t^*(Y)}{dt} \ .$$
Expliciter une relation simple entre $\mathcal{L}_X Y$ et $[X, Y]$.

(3) En déduire une description géométrique de $[X, Y]$.

2. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^3$ qui sont en chaque point linéairement indépendants. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes.
- $[X, Y] \in \mathrm{Vect}(X, Y)$ en tout point,
- au voisinage de tout point m de $\mathbb{R}^3$ il existe une surface contenant m et dont le plan tangent contient X et Y.

Comment peut-on étendre ce résultat dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 4$?

3. Montrer l'*identité de Jacobi* : si X, Y, Z sont trois champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, alors
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \ .$$

4. On considère la surface de révolution S paramétrée par
$$x = \cosh u \cos\theta, \quad y = \cosh u \sin\theta, \quad z = u,$$
où $u \in \mathbb{R}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Calculer la première et la deuxième forme fondamentale, la courbure de Gauss et la courbure moyenne de S.

2) Déterminer par un argument géométrique quelle est l'intégrale sur S de sa courbure de Gauss, et vérifier ainsi l'expression de la courbure de Gauss obtenue à la question précédente.

3) Soient α_0 et θ_0 donnés. Montrer que les courbes C_{α_0,θ_0} de S, images des droites $u = \tan(\alpha_0)(\theta - \theta_0)$, coupent les méridiens $\theta =$ *constante* suivant un angle constant.

4) Montrer que l'application de Gauss $N : S \to S^2$ préserve les angles.

5. Déterminer les géodésiques de la sphère.