M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Feuille de TD no 4

1. Pour les surfaces suivantes, calculer la métrique induite, la seconde et la troisième forme fondamentales, puis la courbure moyenne et la courbure de Gauss.

(1) Un plan dans $\mathbb{R}^3$.

(2) la sphère de rayon R dans $\mathbb{R}^3$.

(3) Le cylindre de rayon R, soit
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = R^2\} \ .$$

(4) La parabole
$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z\} \ .$$

2.

(1) On considère une surface de révolution S paramétrée sous la forme
$$\begin{array}{llll} \phi : & \mathbb{R} \times S^1 & \to \mathbb{R}^3 \ , \\ & (t, \theta) & \mapsto (r(t)\cos(\theta), r(t)\sin(\theta), z(t)) \ . \end{array}$$
Déterminer la métrique induite et la seconde forme fondamentale de S, ainsi que sa courbure moyenne et sa courbure de Gauss.

(2) Montrer que les courbes $\phi(\mathbb{R} \times \{\theta\})$ sont des géodésiques de S.

(3) Quand les courbes $\phi(\{u\} \times S^1)$ sont-elles géodésiques ?

(4) Vérifier les résultats avec la sphère de rayon R.

(5) Appliquer la question 1. à la pseudo-sphère, obtenue pour
$$r(t) = 1/\cosh(t) \ , \quad z(t) = t - \tanh(t) \ .$$

(6) La pseudo-sphère est-elle une surface régulière ?