M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Feuille de TD no 5

1. Métriques non réalisables dans $\mathbb{R}^3$. 1. Soit S une surface compacte dans $\mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe au moins un point de S où la courbure est strictement positive. (On pourra considérer les points qui sont à distance maximale d'un point fixé.)

2. On considère le quotient $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Montrer qu'on peut définir en chaque point $x \in T^2$ un plan tangent et un produit scalaire g_x de manière que la distance obtenue soit localement isométrique à celle du plan euclidien.

3. Montrer que (T^2, g) n'est pas isométrique à une surface dans $\mathbb{R}^3$.

2. Champs de Jacobi. Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$, et soit $(c_s)_{s\in[0,1]}$ une famille à un paramètre de géodésiques paramétrées à vitesse constante $c_s : [0, L] \to S$, de manière que $c_s(t)$ soit régulière en (s, t) et que la vitesse de c_0 soit 1. Soit $Y = (\partial c_s(t)/\partial s)_{|s=0}$, on dira que Y est un champ de Jacobi le long de $c_0([0, L])$.

1. Montrer que la composante de Y parallèle à c_0 est affine en t.

2. Montrer que la composante de Y orthogonale à c_0 satisfait l'équation différentielle :

$$D_{c_0'(t)} D_{c_0'(t)} Y(t) + K(c_0(t))Y(t) = 0 \ .$$

3. Soit $Y_0, Y_1 \in T_{c_0(0)}S$. Montrer qu'il existe un unique champ de Jacobi Y défini le long de $c_0([0, L])$ tel que $Y(c_0(0)) = Y_0$ et que $D_{c_0'(0)}Y = Y_1$.

3. Variation seconde de la longueur. Soit S une surface dans $\mathbb{R}^3$, soit $c : [0, L] \to S$ une géodésique paramétrée à vitesse 1. On considère une fonction $y : [0, L] \to \mathbb{R}$ régulière s'annulant en 0 et en L, et on pose $Y(t) = y(t)Jc'(t)$ pour $t \in [0, L]$.

1. Montrer qu'il existe une famille à un paramètre (c_s) de courbes sur S avec $c_0 = c$, $(\partial c_s(t))/\partial s)_{|s=0} = Y$ et $c_s(0) = c(0)$, $c_s(L) = c(L)$ pour tout s.

2. On pose $L_c(s) = L(c_s)$. Montrer que $L_c'(0) = 0$.

3. Montrer que

$$L_c''(0) = \int_0^L -y(t)(y''(t) + K(c(t))y(t))dt \ .$$

4. En déduire que, sur une surface à courbure négative ou nulle, les géodésiques sont des minima locaux de la longueur parmi les courbes dont les extrémités sont fixées.

5. Donner un énoncé analogue pour les géodésiques fermées.

6. Ceci reste-t-il vrai lorsque la courbure peut être positive ?

4. Théorème de Bonnet-Myers. On admettra que, sur une surface complète, tout couple de points peut être joints par une géodésique de longueur minimale, c'est-à-dire dont la longueur est égale à la distance entre ses extrémités. Montrer que toute surface complète S de courbure $K \geq K_0$, où $K_0 > 0$, est compacte, de diamètre au plus $\pi/\sqrt{K_0}$.