M1 MAF — Géométrie différentielle
2011-12
Feuille de TD no 6

## 1. Calcul de volume

1. Calculer, par exemple en utilisant des coordonnées sphériques, le volume (donc l'aire, puisque c'est le terme d'usage en dimension 2) de la sphère de rayon $R$ dans $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer le volume de la sphère de rayon $R$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$, pour tout $n \geq 1$.

## 2. Base de $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$

1. Montrer que les $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, forment une base de $\Omega^k(\mathbb{R}^n)$.

2. Montrer que $\Omega^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$ pour $k > n$.

## 3. Symétrie du produit extérieur

Soit $E$ un espace vectoriel, soient $\alpha \in \Omega^k(E)$ et $\beta \in \Omega^l(E)$. Exprimer $\beta \wedge \alpha$ en fonction de $\alpha \wedge \beta$.

## 4. Différentielle extérieure et produit extérieur

Soit $M$ une variété et soient $\alpha, \beta$ deux formes différentielles. Exprimer $d(\alpha \wedge \beta)$ en fonction de $\alpha, \beta$ et de leurs différentielles extérieures.

## 5. Divergence d'un champ de vecteurs

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à bord régulier, soit $v$ un champ de vecteurs sur $U$. On définit la divergence de $v$ comme

$$div(v) = \sum_i \partial v_i / \partial x_i \ .$$

Exprimer l'intégrale sur $U$ de la divergence de $v$ en termes d'une intégrale sur le bord de $U$. (On pourra utiliser le théorème de Stokes.)

## 6. Rotationnel d'un champ de vecteurs

Soit $u$ un champ de vecteurs sur un ouvert $\Omega$ à bord régulier de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$\nabla \wedge u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \ .$$

Exprimer l'intégrale sur $\Omega$ de $\nabla \wedge u$ en termes d'une intégrale sur le bord.

## 7. Formule de Gauss-Bonnet

1. Soit $S$ une surface munie d'une métrique riemannienne (par exemple une surface dans $\mathbb{R}^3$), et soit $c : \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ une courbe fermée plongée, paramétrée à vitesse 1, qui borde un disque $D \subset S$ du coté de $Jc'(t)$. Montrer que l'intégrale sur $D$ de la courbure $K$ de $S$ est égale à $2\pi$ moins l'intégrale de la courbure de $c$.

2. On suppose maintenant que $D$ est un domaine à bord régulier par morceaux. Donner une formule analogue, tenant compte des angles aux points de discontinuité.

3. On suppose que $S$ est une sphère, munie d'une métrique riemannienne quelconque. Montrer que l'intégrale de la courbure est égale à $4\pi$.

4. Qu'en est-il si $S$ est un tore ?

5. Etendre le résultat à un tore à deux trous.

## 8. Théorème de Cartan-Hadamard

Soit $S$ une surface complète simplement connexe de courbure $K \leq 0$, soit $x \in S$. Montrer que l'application exponentielle $\exp_x : T_xS \to S$ est un difféomorphisme.

## 9. Classes de cohomologie de de Rham

Soit $M$ une variété de dimension $n$ compacte. On note $d_k : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$.

1. Montrer que $Im(d_{k-1}) \subset Ker(d_k)$. On notera alors $H^k(M) = \ker(d_k)/\mathrm{Im}(d_{k-1})$.
2. Montrer que $\wedge$ définit un "produit" sur $H^k(M) \times H^l(M)$.
3. On suppose que $M = T^2$. Déterminer $H^0(M), H^1(M), H^2(M)$.