M1 MAF GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE 2012-13

TD 1: RAPPELS

1. Isométries

Rappelons qu'une application affine $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si

$$\|F(p) - F(q)\| = \|p - q\|, \text{ pour tout } p, q \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 1. *Montrer qu'une application affine $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement si c'est la composée d'une translation et d'une transformation orthogonale, c'est à dire qu'elle préserve le produit scalaire.*

On note $O(n, \mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales et $SO(n, \mathbb{R})$ celles qui préservent l'orientation (i.e. de déterminant 1).

Exercice 2. *Montrer que*
1) $O(n, \mathbb{R})$ est un groupe compact;
2) $SO(n, \mathbb{R})$ est un groupe connexe;
3) $SO(2, \mathbb{R})$ est commutatif, mais pas $SO(n, \mathbb{R})$, $n \geq 3$;
4) $SO(n, \mathbb{R})$ agit transitivement sur la sphère S^{n-1} ($n \geq 2$).

Exercice 3. *Montrer que les reflexions (symétries orthogonales par rapport à un hyperplan) engendrent le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$.*

2. Produit vectoriel

Rappelons que le produit vectoriel $u \wedge v$ de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ caractérisé par la formule

$$\langle u \wedge v, w\rangle = \det(u, v, w), \text{ pour tout } w \in \mathbb{R}^3.$$

Exercice 4. *Montrer les propriétés suivantes:*
1) $u \wedge v = -v \wedge u$; $u \wedge v = 0$ ssi u et v sont linéairement dépendants;
2) $u \wedge v$ dépend linéairement de u et v; $u \wedge v$ est orthogonal à u et à v;
3) $\det(u, v, u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 \geq 0$;
4) $(u \wedge v) \wedge w = \langle u, w\rangle v - \langle v, w\rangle u$, en déduire l'identité de Jacobi:

$$u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u) + w \wedge (u \wedge v) = 0.$$

Exercice 5. *Montrer que*

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 \sin^2 \theta = A^2,$$

où θ est l'angle $\langle u, v\rangle$ et A est l'aire du parallélogramme engendré par u, v.

Exercice 6. *Soit $t \mapsto u(t), v(t) \in \mathbb{R}^3$ deux familles lisses de vecteurs. Mq*

$$\frac{d}{dt}[u(t) \wedge v(t)] = \frac{du}{dt} \wedge v(t) + u(t) \wedge \frac{dv}{dt}.$$

3. Calcul différentiel

Exercice 7. *Montrer qu'une norme n'est jamais différentiable à l'origine.*

Exercice 8. *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable et* $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(t, f(t, f(t,t)))$. *Exprimer* φ' *en fonction des dérivées partielles de* f.

Exercice 9. *On munit* $\mathbb{R}^n$ *de sa structure euclidienne usuelle. Soit* $a = (a_1, ..., a_n) \neq 0$. *On considère* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *définie, pour* $x \in \mathbb{R}^n$ *par*

$$f(x) = \langle a, x\rangle e^{-\|x\|^2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i^2\right).$$

Montrer que f *est différentiable et calculer sa différentielle.*

Exercice 10. *Soit* $k > 0$ *et* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *t.q.*

$$\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|, \text{ pour tout } x, y \text{ dans } \mathbb{R}^n.$$

(1) Montrer que f *est injective et que* $f(\mathbb{R}^n)$ *est un fermé de* $\mathbb{R}^n$.

(2) Montrer que la différentielle $Df(x)$ *est inversible pour tout* x *dans* $\mathbb{R}^n$.

(3) Montrer, grâce au théorème d'inversion locale que $f(\mathbb{R}^n)$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*; en déduire que* f *est un* $\mathcal{C}^1$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *sur lui-même.*

Exercice 11. *On considère* $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$. *Montrer que l'application* f *définit un difféomorphisme au voisinage de chacun des points de* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, *mais ne définit pas un difféomorphisme global.*

Exercice 12. *Soit* C *l'ensemble des* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

1) Cette équation définit-elle y *comme une fonction implicite de* x *?*

2) Mq cette fonction est dérivable lorsqu'elle existe et calculer sa dérivée.

Exercice 13. *Soit* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *une courbe paramétrée régulière au voisinage de* $0 \in \Gamma$. *Montrer qu'on peut trouver un difféomorphisme local* Φ *défini dans une petite boule* B *centrée à l'origine, tel que*

$$\Phi(\Gamma \cap B) = \{x = 0\} \cap B.$$

Exercice 14. *Montrer qu'une courbe plane* $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ *est localement le graphe d'une fonction d'une variable réelle* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 15. *Montrer qu'une surface* $S \subset \mathbb{R}^3$ *est localement le graphe d'une fonction de deux variable réelles* $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Exercice 16. *Soit* V *un ouvert de* $\mathbb{R}^3$ *et* $f : V \to \mathbb{R}$ *une fonction lisse. Soit* $p \in V$ *tel que* $f(p) = 0$ *et* $D_p f$ *est surjective. Montrer que l'ensemble*

$$S := \{(x, y, z) \in V \mid f(x, y, z) = 0\}$$

est une surface régulière au voisinage de p.