M1 MAF GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE 2012-13

TD 2: COURBES PLANES

Exercice 1. *Soit* $\Gamma = \varphi(I)$ *une courbe géométrique paramétrée par sa longueur d'arc* $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$. *Montrer que la courbure de* Γ *en* $\varphi(s)$ *est*

$$\kappa(s) = \det(\varphi'(s), \varphi''(s)).$$

En déduire que si $\psi : t \in J \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ *est une paramétrisation arbitraire de* Γ, *alors la courbure de* Γ *au point* $\psi(t)$ *est donnée par*

$$k(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[x'(t)^2 + y'(t)^2]^{3/2}}.$$

Exercice 2.

1) Etudier, tracer et calculer la courbure de la cycloïde

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (at - a\sin t, a - a\cos t) \in \mathbb{R}^2,\ a > 0.$$

2) Même question pour la tractrice

$$\varphi : t \in]0, \pi[\mapsto a\left(\sin t, \cos t + \ln\tan\frac{t}{2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

3) Idem pour la spirale logarithmique

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (ae^{bt}\cos t, ae^{bt}\sin t) \in \mathbb{R}^2,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3. *Montrer qu'une courbe géométrique* $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^2$ *a une courbure constante si et seulement si c'est une (portion) de droite ou de cercle.*

Exercice 4. *Soit* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *une application lisse, avec* $\varphi(0) = (0, 0)$, *dont l'image* Γ *est incluse dans la cubique cuspidale*

$$\mathcal{C} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2 = x^3\right\}.$$

Montrer qu'on a nécessairement $\varphi'(0) = (0, 0)$.

Exercice 5. *Soit* $a, b > 0$. *Déterminer le lieu géométrique défini par la paramétrisation*

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto \left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 6. *Soit* $\varphi : t \in]0, +\infty[\mapsto (t^2, t^3) \in \mathbb{R}^2$. *Montrer que la longueur d'arc comptée à partir du point* $(0, 0)$ *est*

$$\ell(t) = \frac{1}{27}(4 + 9t^2)^{3/2} - \frac{8}{27}.$$

Exercice 7. *Soit* $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ *une courbe paramétrée telle que* $||\varphi(t) - \varphi(s)||$ *est une fonction de* $|t - s|$. *Montrer que la courbe géométrique associée est une portion de droite ou de cercle.*

Exercice 8. *On considère la cardioïde définie en coordonnées polaires par*

$$r(\theta) = a(1 + \cos\theta), \text{ où } a > 0.$$

1) Tracer son graphe et calculer sa courbure.

2) Calculer le périmètre et l'aire de l'intérieur de la cardioïde.

Exercice 9. *Savez vous calculer le périmètre d'une ellipse ? Et son aire ?*

Exercice 10. *La développée d'une courbe plane Γ de paramétrisation $\varphi(t)$ est le lieu de ses centres de courbure. Elle admet la paramétrisation*

$$\psi(t) = \varphi(t) + \kappa(t)^{-1} N(t),$$

où $N(t)$ est le vecteur normal unitaire à Γ en $\varphi(t)$.

1) Montrer que la tangente en $\psi(t)$ à la développée est portée par la normale en $\varphi(t)$ à Γ.

2) Montrer que la développée de la parabole d'équation $y = ax^2$ est la courbe d'équation $27ay^2 = 8(x - a)^3$.

Exercice 11. *Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique et*

$$g : t \in \mathbb{R} \mapsto g(t) = f(t) + t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que g induit une application $G : S^1 \to S^1$ dont on calculera le degré.

Exercice 12. *Soit $f : S^1 \to S^1$ une application continue. Montrer que le nombre $P(f)$ de points fixes de f vérifie*

$$P(f) \geq |\deg f - 1|.$$

Exercice 13. *Soit $f, g : S^1 \to S^1$ deux applications continues. Montrer que*

$$\deg(f \circ g) = \deg f \circ \deg g.$$

En déduire que f a beaucoup de points périodiques si $|\deg f| \geq 2$.