Géométrie différentielle, M1 MAF
Petit rappel de calcul différentiel

Octobre 2012

Cette feuille n'est pas un cours mais un simple aide-mémoire. Son objectif est de rappeler les principales notions de calcul différentiel qui sont indispensables pour comprendre le cours de géométrie différentielles. Si certaines de ces notions vous paraissent floues, ou si la preuve de certains énoncés vous semble difficile, vous êtes fortement encouragés à consulter vos cours antérieurs ou un livre de manière à bien maîtriser ces notions.

Différentielle des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ régulière (disons C^∞, même si ça n'est pas nécessaire). Soit $x \in \mathbb{R}^n$ un point, et soit $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur. On pose :

$$d_x f(v) := \left(\frac{d}{dt} f(x+tv)\right)_{t=0} \quad .$$

Ceci définit une application *linéaire* de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ — la linéarité étant par rapport à v — qu'on appelle la différentielle de f en x.

Action des champs de vecteurs sur les fonctions. Considérons maintenant un champ vecteurs v sur $\mathbb{R}^n$, c'est à dire la donnée, en chaque point $x \in \mathbb{R}$, d'un vecteur v_x. On définit l'action par dérivation de v sur la fonction f de la manière suivante. $v.f$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$(v.f)(x) := d_x f(v_x) \ .$$

Extension aux fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si maintenant $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, soit $F = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$, et si $x \in \mathbb{R}^n$ est un point et $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur, on définit :

$$d_x F(v) := (d_x f_1(v), d_x f_2(v), \cdots, d_x f_p(v)) \ .$$

De même, on note :

$$(v.F)(x) := d_x F(v) \ .$$

Formule de dérivation de la composée de deux fonctions. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, et soit $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, on a en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$:

$$d_x(G \circ F)(v) = (d_{F(x)}G) \circ (d_x F)(v) \ .$$

Exemples d'application. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^p$ une courbe paramétrée, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $G : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ une fonction régulière. On a d'après la formule précédente :

$$\frac{d}{dt}(G(\gamma(t))) = (d_{\gamma(t)}G)(\gamma'(t)) \ .$$

Théorème d'inversion locale. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, régulière, soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $d_x f$ est inversible. Il existe alors un voisinage U de x tel que la restriction de f à U est un difféomorphisme sur $f(U)$.

Théorème des fonctions implicites (1). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ où $\partial f / \partial y \neq 0$. Il existe un voisinage U de (x, y) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage V de x dans $\mathbb{R}$ et une application $u : V \to U$ telle que

$$\{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\} = u(V) \cap U \ .$$

Théorème des fonctions implicites (2). Soit $f : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$, soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ tel que la restriction de $d_{(X,Y)}f$ à $\mathbb{R}^q$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^q$ dans $\mathbb{R}^q$. Il existe un voisinage U de (X, Y) dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, un voisinage V de X dans $\mathbb{R}^p$ et une application $u : V \to U$ telle que

$$\{(X, Y) \in U \mid f(X, Y) = 0\} = u(V) \cap U \ .$$

Différentielle d'une fonction définie sur une surface. Soit $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface, et soit $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x \in S$, et soit $v \in T_x S$. On peut étendre f en une fonction $\overline{f}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, avec $\overline{f}_{|S} = f$. On remarque que $(d_x\overline{f})(v)$ ne dépend pas de l'extension $\overline{f}$ choisie, et on définit donc $d_x f(v) := d_x\overline{f}(v)$. On peut étendre cette définition au cas où f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^3$.

Hessien d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soit encore $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, et soit $x \in \mathbb{R}^n$. Le *hessien* de f en x est la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$. Si $v, w \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs, on pose :

$$\mathrm{hess}_x(v, w) := (v.(w.f))(x) = d_x((d_x f)(w))(v) \ .$$

Dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, la matrice de $\mathrm{hess}_x(f)$ est la matrice des dérivées secondes de f en x.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Lemme de Sard