M1 MAF — Géométrie différentielle
2012-13
Devoir no 1
à rendre le 24 octobre

Ce devoir n'est pas obligatoire mais il vous est fortement recommandé de résoudre les exercices, de rédiger les solutions et de le rendre pour que nous puissions le corriger. Vous pouvez discuter entre vous des idées à utiliser pour résoudre les questions posées, mais vous êtes encouragés à rédiger seul les réponses.

1. Soit $c : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^2$ une courbe fermée simple paramétrée à vitesse unité. On note Ω le domaine relativement compact bordé par c. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

(1) la courbure de c est de signe constant ($k \geq 0$ partout ou $k \leq 0$ partout),

(2) c reste d'un seul coté de ses tangentes,

(3) deux points de Ω sont joints par un segment dans Ω,

(4) l'intersection de Ω avec une droite est un intervalle.

Si ces propriétés sont satisfaites on dira que c est *convexe*.

2. On considère une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ qu'on supposera paramétrée à vitesse 1. On suppose que la courbure et la torsion de γ sont égales à des constantes $k_0 > 0$ et $\tau_0 \neq 0$. Montrer que γ est une hélice, c'est-à-dire que, dans un système de coordonnées adapté, elle s'écrit sous la forme :

$$\gamma(t) = (a\cos(\omega t), a\sin(\omega t), bt) \ ,$$

où a, b et ω sont des constantes qu'on exprimera en fonction de k_0 et de τ_0.