M2 MAF — Géométrie riemannienne
2012-13
Feuille d'exercices no 1

1. Courbure d'une connexion sur un fibré vectoriel. On considère un fibré vectoriel E sur une variété M, et on suppose E muni d'une connexion ∇. Soit u, v deux champs de vecteurs sur M et x une section de E, on définit la courbure R de ∇ sur u, v, x par

$$R(u,v)x = \nabla_u(\nabla_v x) - \nabla_v(\nabla_u x) - \nabla_{[u,v]}x \ .$$

1. Montrer que R est antisymétrique en u, v.
2. Montrer que, pour tout $m \in M$, $R(u,v)x$ en m ne dépend que de $u(m), v(m)$ et $x(m)$.
3. Montrer l'identité de Bianchi différentielle (aussi appelée seconde identité de Bianchi) : si u, v, w sont trois champs de vecteurs sur M alors

$$(\nabla_u R)(v,w) + (\nabla_v R)(w,u) + (\nabla_w R)(u,v) = 0 \ .$$

4. On suppose que pour tout point $m \in M$, la fibre E_m de E en m est munie d'un produit scalaire h_m, et que, dans une trivialisation locale, h_m dépend de manière régulière de m. Montrer que si u, v sont deux champs de vecteurs sur M alors $R(u,v)$ est en chaque point $m \in M$ un opérateur linéaire anti-autoadjoint pour h_m.

2. Actions de groupes sur $\mathbb{R}^n$, S^n et H^n. 1. On rappelle que $O(n)$ est le groupe des matrices $n \times n$ orthogonales. Montrer que $O(n)$ peut être vu comme une sous-variété de $M(n)$, l'espace des matrices $n \times n$. Quelle est sa dimension ?

2. Donner une expression du groupe des isométries de l'espace euclidien faisant intervenir $O(n)$. Montrer que ce groupe agit transitivement sur l'espace des couples (x, e), où $x \in \mathbb{R}^n$ et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ est un repère orthonormé de $\mathbb{R}^n$.

3. Montrer que $O(n+1)$ agit par isométries sur la sphère S^n. Montrer que cette action est transitive sur l'espace des couples (x, e), où $x \in S^n$ et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ est un repère de $T_x S^n$ orthonormé pour la métrique canonique de S^n.

On considère maintenant l'espace hyperbolique de dimension n, dont on rappelle qu'il est défini comme une sous-variété de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{n,1}$ muni de la métrique induite :

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid \langle x, x \rangle = -1 \text{ et } x_0 > 0\} \ .$$

On note aussi $I_{n,1}$ la matrice $(n+1)\times(n+1)$ diagonale de diagonale $(-1, 1, \cdots, 1)$, et $O(n,1)$ l'ensembles de matrices $(n+1)\times(n+1)$ telles que $MI_{n,1}M^t = I_{n,1}$, où M^t désigne la transposée de M.

4. Montrer que $O(n,1)$ est un groupe. Montrer qu'il peut être vu comme une sous-variété de $M(n+1)$. Quelle est sa dimension ?

5. Montrer que $O(n,1)$ contient un sous-groupe d'indice 2 qui agit par isométries sur H^n, puis que cette action est transitive sur l'ensemble des couples (x, e), où $x \in H^n$ et $e = (e_1, \cdots, e_n)$ est un repère de $T_x S^n$ orthonormé pour la métrique canonique de H^n.

3. Calculs de courbure. 1. Montrer que l'opérateur de courbure de Riemann de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est nul.

Soient g, h deux formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel E de dimension finie n. On définit le produit de Kulkarni-Nomizu $g \owedge h$ de g et h par :

$$\forall x, y, z, t \in E, (g \owedge h)(x,y,z,t) = g(x,t)h(y,z) - g(x,z)h(y,t) \ .$$

2. Montrer que $g \owedge h$ est antisymétrique en (x, y) et en (z, t), et symétrique par rapport à l'échange de (x, y) et de (z, t).

3. Montrer que l'opérateur de courbure de Riemann de la sphère S^n est $g \owedge g$, où g est la métrique canonique de S^n. (NB : on pourra utiliser l'exercice précédent).

4. Montrer que l'opérateur de courbure de Riemann de l'espace hyperbolique est $-g \owedge g$, où g est maintenant la métrique canonique de H^n.