M2 MAF — Géométrie riemannienne
2012-13
Feuille d'exercices no 2

1. Produit de Kulkarni-Nomizu. On considère un espace vectoriel de dimension finie E. On rappelle la définition du produit de Kulkarni-Nomizu $\owedge : S^2E^* \times S^2E^* \to E^* \otimes E^* \otimes E^* \otimes E^*$ défini par

$$(h \owedge k)(x, y, z, t) = h(x, t)k(y, z) - h(x, z)k(y, t) \ .$$

1. Montrer que $\owedge$ est un opérateur bilinéaire symétrique.

2. On considère deux produits scalaires h, k sur E. Montrer que $h \owedge k$ a toutes les symétries d'ordre 3 d'un tenseur de courbure de Riemann : antisymétrie par rapport à x, y et par rapport à z, t, symétrie par échange de (x, y) et de (z, t), identité de Bianchi.

3. En déduire que $h \owedge k$ peut s'interpréter comme une forme bilinéaire symétrique sur $\Omega^2(E)$, l'espace des 2-formes alternées sur E.

2. Courbure des métriques à courbure constante. Soit (M, g) une variété riemannienne telle que, en chaque point x, la courbure sectionnelle de g sur tous les 2-plans de T_xM est égale à $K(x)$.

1. Montrer que le tenseur de courbure de Riemann de g est $K(x)g \owedge g$.

2. Montrer que g est une métrique d'Einstein, avec $\mathrm{ric}_g = r(x)g$, pour une fonction r qu'on précisera.

3. En déduire que $K(x)$ est en fait constante.

4. Montrer (en utilisant les résultats de l'exercice 3 de la feuille 1) que H^n est à courbure constante -1, et que S^n est à courbure constante 1.

3. Modèles locaux des métriques à courbure constante. On considère une variété riemannienne (M, g) à courbure sectionnelle constante -1.

1. Soit $g : [0, L] \to M$ une géodésique paramétrée à vitesse 1, et soit Y un champ de Jacobi orthogonal à g. Montrer que Y satisfait l'équation différentielle :

$$Y'' + Y = 0 \ ,$$

où la dérivation est par rapport à la connexion de Levi-Civita de g.

On considère maintenant $x_0 \in M$, et $x_1 \in H^n$. On fixe une identification isométrique $u : T_{x_0}M \to T_{x_1}H^n$. On rappelle que l'application exponentielle $\exp_{x_0}$ est un difféomorphisme d'un voisinage U de 0 dans $T_{x_0}M$ sur un voisinage de V de x_0, et on considère l'application

$$\phi : \exp_{x_1} \circ u \circ (\exp_{x_0|V})^{-1} : V \to H^n \ .$$

2. Montrer que ϕ est une isométrie locale, c'est-à-dire qu'elle préserve la métrique. En déduire que chaque point de M a un voisinage isométrique à un ouvert de l'espace hyperbolique.

3. Montrer de manière analogue que si $K = 0$ alors (M, g) est localement isométrique à l'espace euclidien, et que si $K = 1$ alors (M, g) est localement isométrique à la sphère S^n.