M2 MAF — Géométrie riemannienne
2012-13
Feuille d'exercices no 3

1. Surfaces de révolution. On considère une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ d'équation

$$x^2 + y^2 = f(z)^2 \ ,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ est une fonction régulière.

1. Calculer la courbure de S en fonction de z.

2. Montrer que les courbes d'équation$\rho =$constante sont des géodésiques.

3. Calculer la courbure géodésique des courbes d'équation $z =$constante. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ces courbes soient géodésiques.

4. Construire un exemple de surface fermée (compacte sans bord) munie d'une métrique riemannienne régulière dans laquelle certaines classes d'homotopie de courbes contiennent plusieurs géodésiques distinctes.

2. Modèle projectif de la sphère et du plan hyperbolique. On appelle S^2_+ l'hémisphère nord de la sphère dans $\mathbb{R}^3$:

$$S^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, x\rangle = -1 \ \& z > 0\} \ .$$

On note ρ_S la projection radiale de S^2_+ sur le plan P d'équation $z = 1$:

$$\rho_S(x, y, z) = (x/z, y/z, 1) \ .$$

1. Montrer que ρ_S est un difféomorphisme de S^2_+ sur P. Donner l'expression de la métrique obtenue en poussant sur P la métrique induite de S^2_+.

2. Montrer que le groupe $O(3)$ agit par isométries sur S^2, et que l'action est transitive sur les couples (x, v), où $x \in S^2$ et $v \in T_xS^2$ est un vecteur unitaire.

3. Montrer que les images dans P des géodésiques de S^2_+ sont exactement les droites.

On rappelle qu'on peut définir le plan hyperbolique comme la quadrique

$$H^2 = \{x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, x\rangle = -1 \ \& x_0 > 0\}$$

munie de la métrique induite, où $\mathbb{R}^{2,1}$ est l'espace de Minkowski de dimension 3, muni des coordonnées x_0, x_1, x_2. On note ρ_H la projection radiale sur le plan H d'équation $x_0 = 1$.

4. Montrer que ρ_H est un difféomorphisme de H^2 sur le disque unité D dans H. Donner l'expression de la métrique obtenue en poussant sur D la métrique induite de H^2.

5. Montrer que le groupe $O_+(2, 1)$ agit par isométries sur H^2, et que l'action est transitive sur les couples (x, v), où $x \in H^2$ et $v \in T_xH^2$ est un vecteur unitaire. (Ici $O_+(2, 1)$ dénote le sous-groupe de $O(2, 1)$ qui envoient le vecteur $(1, 0, 0)$ sur un vecteur dont la première coordonnée est positive. On pourra montrer que c'est bien un sous-groupe, et que son indice est égal à 2.)

6. Montrer que les images dans D des géodésiques de H^2 sont les segments de droites.

7. Montrer que si $x, y \in D$ sont deux points distincts, la distance hyperbolique entre eux est donnée par la formule :

$$d_h(x, y) = -\frac{1}{2}\log[x, y; a, b] \ ,$$

où a, b sont les intersections avec le bord de D de la droite passant par x et y, et où $[, ; ,]$ désigne le birapport.

8. Reprendre le questions 4 à 7 pour l'espace hyperbolique H^n de dimension n.

3. Construction de surfaces hyperboliques. 1. Montrer (en utilisant par exemple l'exercice précédent) qu'il existe dans le plan hyperbolique un hexagone à angle droit dont toutes les arêtes ont même longueur. (On pourra montrer aussi que cet hexagone est unique quand on fixe la longueur des arêtes.)

2. En déduire qu'il existe une métrique hyperbolique à bord géodésique sur le pantalon, c'est-à-dire la sphère privée de 3 disques.

3. En déduire qu'il existe une métrique hyperbolique sur la surface (fermée orientable) de genre 2, puis sur toutes les surfaces de genre supérieur.

4. Que peut-on dire sur la dimension de l'espace des déformations de ces métriques hyperboliques ?

4. Construction d'une variété hyperbolique de dimension 3. 1. Déterminer les angles dièdres du dodécaèdre régulier dans l'espace euclidien.

2. Montrer qu'il existe un dodécaèdre hyperbolique régulier (on pourra préciser ce qu'on entend par là) dont les angles dièdres sont égaux à $2\pi/5$. On l'appellera D.

3. Montrer qu'il existe une manière d'identifier isométriquement les faces de D deux à deux, de manière que chaque arête de D soit identifiée à 4 autres arêtes.

4. En déduire l'existence d'une variété hyperbolique fermée (compacte sans bord) de dimension 3.