

Analyse 3b
pour le BASI physique et ingénierie

Jean-Marc Schlenker

UNIVERSITY OF LUXEMBOURG, CAMPUS KIRCHBERG, MATHEMATICS RESEARCH UNIT,
BLG, 6, RUE RICHARD COUDENHOVE-KALERGI, L-1359 LUXEMBOURG

E-mail address: `jean-marc.schlenker@uni.lu`

Table des matières

Introduction et préliminaires	5
1. Objectifs du cours	5
2. Méthode de travail	5
3. Exercices	6
4. Validation des acquis	6
Références bibliographiques	6
Chapitre 1. Intégrales des fonctions de plusieurs variables	7
Un peu d'histoire	7
Objectifs du chapitre	7
1. Rappel sur l'intégrale de Riemann en une variable	8
2. Intégrale d'une fonction de deux variables	9
3. Intégrations successives et théorème de Fubini	10
4. Formule de changement de variable	10
5. Formule de Green	12
6. Théorème de Stokes	15
7. Exercices	17
Chapitre 2. Suites et séries de fonctions	21
Motivations	21
Un peu d'histoire	21
Objectifs du chapitre	21
1. Suites de fonction	22
2. Séries de fonctions	24
3. Séries entières	27
4. Exercices	31
Chapitre 3. Espaces de Hilbert	35
Motivations	35
Un peu d'histoire	35
Objectifs du chapitre	35
1. Produits scalaires	35
2. Espaces métriques complets	38
3. Espaces de Hilbert	38
4. Géométrie dans les espaces de Hilbert	40
5. Théorème de représentation de Riesz	42
6. Compacité faible	43
7. Bases orthonormées	44
8. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt	46

9. Exercices	47
Chapitre 4. Séries de Fourier	51
Motivations	51
Un peu d'histoire	51
Objectifs du chapitre	51
1. Fonctions périodiques	52
2. Séries de Fourier complexes	52
3. Séries de Fourier réelles	53
4. Convergence des séries de Fourier	54
5. Régularité des fonctions et coefficients de Fourier	55
6. Séries de Fourier en plusieurs variables	56
7. Exercices	56
Chapitre 5. Transformée de Fourier	59
Motivations	59
Objectifs du chapitre	59
1. Des séries de Fourier à la transformée de Fourier	59
2. Définition, formule inverse	60
3. Propriétés	61
4. Produit et convolution	61
5. Formule de Parseval	62
6. Exemples	63
7. Transformée de Fourier dans \mathbb{R}^n	63
8. Exercices	63
Chapitre 6. Transformée de Laplace	65
Motivations	65
Un peu d'histoire	65
Objectifs du chapitre	65
1. Définition et inversion	65
2. Propriétés	66
3. Exercices	67
Chapitre 7. Introduction aux équations aux dérivées partielles	69
Motivations	69
Un peu d'histoire	69
Objectifs du chapitre	69
1. Introduction	69
2. Cordes vibrantes	70
3. Equation de Laplace et équation de Poisson	71
4. Equation de la chaleur	72
5. Equation des ondes	73
6. Exercices	74
Bibliographie	75

Introduction et préliminaires

1. Objectifs du cours

Pour comprendre les bases de la physique moderne, comme pour maîtriser les techniques même élémentaires de l'ingénierie, certains outils mathématiques sont indispensables. L'objectif de ce cours, comme des cours de mathématiques que vous avez suivi en première année et que vous suivrez au second semestre de cette année, est de vous permettre d'appréhender ces notions mathématiques et d'apprendre à les utiliser dans des contextes proches de ceux où vous pourrez les rencontrer dans la suite de vos études puis dans votre futur métier.

De ce point de vue, il est souhaitable, mais pas indispensable, de comprendre les bases mathématiques rigoureuses qui sous-tendent les outils utilisés. Le cours se concentrera donc sur l'utilisation pratique des outils, plus que sur la compréhension en profondeur des notions sous-jacentes. La place des preuves formelles sera donc limitée. Les étudiants qui souhaiteront mieux comprendre les bases mathématiques des éléments du cours, ou qui voudraient connaître les preuves de certains résultats présentés sans démonstration, pourront s'adresser aux enseignants.

Dans certains cas nous n'hésiterons pas à donner des énoncés imprécis, par exemple dans le dernier chapitre sur l'introduction aux équations aux dérivées partielles, où notre objectif sera de montrer et d'expliquer quelques propriétés essentielles de ces équations.

Dans chaque chapitre du cours nous essaierons de donner des éléments historiques ainsi que quelques motivations pour justifier le contenu du cours. Là aussi nous en resterons à quelques points de repère, et les étudiants qui souhaiteraient en savoir plus sont invités à s'adresser aux enseignants.

2. Méthode de travail

Pour acquérir le contenu du cours, les étudiants pourront utiliser à la fois le cours, les notes de cours qui seront régulièrement distribuées, ainsi que toute autre source bibliographique qui leur conviendra.

On peut rappeler que, en ce qui concerne les mathématiques, il est rarement utile d'apprendre par coeur des résultats ou des énoncés ; ça n'est réellement utile que pour un petit nombre de formules ou de théorèmes importants. Il est par contre utile de comprendre et de savoir refaire seul les preuves qui seront faites en cours — elles ont en général une réelle valeur pédagogique — et d'être capable de résoudre seul les exercices qui ont été vus lors des séances de travaux dirigés.

Le cours sera disponible sous forme écrite, sur la page *moodle* du cours. Chaque chapitre y sera mis en ligne en principe au moment où se termine sa présentation en cours, de manière à encourager les étudiants à prendre leurs propres notes pendant le cours.

3. Exercices

Les exercices forment une composante essentielle du cours — on pourrait même considérer que l’objectif essentiel de l’étudiant qui suit le cours devrait être de savoir faire, seul et correctement, les exercices.

Pour aider les étudiants à acquérir le contenu de chaque chapitre, deux types d’exercices “particuliers” seront proposés.

- Quelques exercices d’application directe du cours seront marqués du symbole “ Δ ”. Tous les étudiants devraient, après avoir suivi le cours et lu les notes, être capable de faire ces exercices.
- Quelques exercices plus difficiles seront marqués du symbole “*”. Ces exercices peuvent être considérés comme optionnels, et destinés aux étudiants qui souhaitent aller, dans la compréhension du cours, au-delà du strict minimum.

Les exercices qui ne sont marqués ni par un symbole ni par l’autre devraient pouvoir être compris et résolus par les étudiants qui auront suivi et compris le cours et auront participé aux travaux dirigés.

Il est important de rappeler que se contenter de suivre la correction des exercices lors des travaux dirigés n’a qu’une valeur pédagogique très limitée. Pour progresser, les étudiants sont fortement encouragés à faire, ou du moins à essayer de faire, les exercices proposés, soit avant, soit pendant les séances de travaux dirigés. Les feuilles d’exercice seront mises en ligne sur la page *moodle* du cours avant les séances de travaux dirigés.

4. Validation des acquis

L’évaluation finale comptera pour l’essentiel de la note, néanmoins le contrôle continu sera pris en compte et permettra aux étudiants qui auront obtenu de bons résultats d’ajouter jusqu’à 3 points à leur note finale.

Lors des examens, la plupart des questions seront des versions légèrement modifiées d’exercices vus lors des travaux dirigés. Les étudiants qui sont capables de refaire de manière indépendante les exercices vus en TD devraient donc obtenir de bons résultats.

Références bibliographiques

Il existe de nombreux ouvrages disponibles sur les sujets traités en cours. On en mentionne seulement quelques-uns ici, qui pour certains ne couvrent qu’une partie du contenu du cours.

Ouvrages en français. Parmi les nombreux ouvrages en français qui couvrent le contenu du cours on peut mentionner celui de Liret et Martinais [LM98]. Pour ce qui est plus spécifiquement des outils mathématiques pour la physique, on pourra se référer au livre de Hulin et Quinton [HQ86].

Références en anglais. Le livre de Marsden et Weinstein [MW85] date un peu mais c’est un bon livre de base sur l’analyse. Il ne contient par contre pas tous les sujets traités dans le cours. Il a l’avantage d’être disponible gratuitement en ligne.

On pourra par ailleurs consulter le livre de Spivak [Spi06], assez complet, ou des ouvrages plus limités mais agréables à lire comme celui de Strang [Str91] ou de Stewart [Ste08].

CHAPITRE 1

Intégrales des fonctions de plusieurs variables

Un peu d'histoire

La notion d'intégrale est apparue au XVII^{ème} siècle lors du développement du calcul différentiel, dû en parallèle à Isaac Newton (1642-1727) et à Gottfried Leibniz (1646-1716). L'un comme l'autre étaient motivés par l'utilisation du calcul différentiel pour la mécanique, et en particulier pour comprendre le mouvement des planètes. Les notations utilisées pour la dérivée et l'intégrale d'une fonction aujourd'hui remontent à celles introduites par Leibniz.

Néanmoins le calcul différentiel tel qu'ils l'ont construit restait dans une certaine mesure mystérieux. C'est à Bernhard Riemann (1826-1866) qu'on doit la première construction rigoureuse de la notion d'intégrale — Riemann est un des plus grand mathématiciens du XIX^{ème} siècle, et il a contribué de manière essentielle à des domaines variés des mathématiques, depuis la géométrie "riemannienne" jusqu'à la théorie des nombres. Une autre construction, beaucoup plus générale et puissante, en a été donnée par Henri Lebesgue (1875-1941). La construction de l'intégrale de Lebesgue a l'avantage de s'appliquer directement aux surfaces ou aux domaines dans des espaces de dimension plus grande. Néanmoins nous nous contenterons ici de rappeler la définition de l'intégrale telle qu'elle est donnée par Riemann, dans le cadre qui nous occupe.

Dans beaucoup de situations physiques — électromagnétisme, mécanique des fluides, etc — on peut transformer une intégration sur un domaine du plan \mathbb{R}^2 en une intégration sur le bord du domaine. C'est possible lorsque la fonction à intégrer satisfait certaines conditions très particulières, et la formule générale qui permet de le faire est connue sous le nom de formule de Green, ou de Green-Riemann. George Green (1793-1841) était un physicien anglais entièrement autodidacte, puisqu'il n'a passé qu'un an à l'école, ce qui ne l'a pas empêché d'apporter des contributions importantes à la science de son époque.

Nous verrons ensuite une version plus générale de cette formule, elle aussi très importante pour les applications en physique, où l'intégration se fait non plus dans un domaine du plan mais sur une surface de l'espace. Cette formule porte le nom de Sir George Gabriel Stokes (1819-1903). Elle a en fait été découverte par Lord Kelvin (1824-1907), un grand physicien anglais (qui a aussi donné son nom au degré Kelvin, utilisé en physique pour mesurer les températures) qui l'avait communiqué à Stokes dans une lettre de 1850. Stokes a ensuite donné cette formule comme question dans un concours de mathématiques en 1854, ce qui a conduit à ce qu'elle porte son nom.

Objectifs du chapitre

Les objectifs principaux de ce chapitre sont les suivants.

- Savoir calculer une intégrale double en se ramenant à deux intégrales successives d'une seule variable, en choisissant convenablement l'ordre des intégrations.
- Connaître et savoir appliquer la formule de changement de variable pour les fonctions de deux variables.
- Comprendre la notion d'intégrale curviligne et d'intégration sur une surface dans \mathbb{R}^3 .

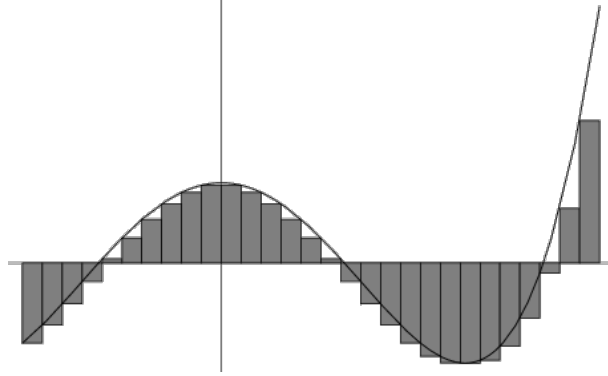


FIGURE 1. L'intégrale au sens de Riemann (image provenant de Wolfram/Mathworld.)

- Connaître et savoir appliquer la formule de Green.
- Connaître et savoir appliquer la formule de Stokes.

1. Rappel sur l'intégrale de Riemann en une variable

1.1. Définition. On peut définir l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} en utilisant la propriété suivante.

THÉORÈME 1.1. *Supposons $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on pose :*

$$I(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \min\{f(x) \mid x \in [a + i(b-a)/n, a + (i+1)(b-a)/n]\} ,$$

$$J(n) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \max\{f(x) \mid x \in [a + i(b-a)/n, a + (i+1)(b-a)/n]\} ,$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(n)$.

DÉFINITION 1.2. *On appelle cette limite l'intégrale de f entre a et b , et on la note*

$$\int_a^b f(x) dx .$$

Si $b < a$ l'intégrale est égale à la même limite avec un signe $-$.

La définition s'étend à des fonctions plus générales que les fonctions continues, par exemple les fonctions qui sont seulement continues par morceaux.

1.2. Signification géométrique. L'intégrale d'une fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ peut s'interpréter comme l'aire sous le graphe de f sur $[a, b]$, à condition de tenir compte du signe : les parties du graphe où f est négative sont comptées négativement.

1.3. Quelques propriétés. On se contente ici de rappeler sans démonstration quelques propriétés essentielles de l'intégrale telle qu'elle est définie ici.

PROPOSITION 1.3 (Dérivation d'une primitive). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable, de dérivée égale à f en tout point.

PROPOSITION 1.4 (Changement de variable). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $u : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 , monotone, telle que $u([c, d]) \subset [a, b]$. Alors*

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du .$$

PROPOSITION 1.5 (Intégration par parties). *Soit $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 . Alors*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt .$$

2. Intégrale d'une fonction de deux variables

2.1. Définition. Une fonction de deux variables est une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, où Ω est un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 .

Pour définir l'intégrale d'une fonction (continue) de deux variables sur un domaine de \mathbb{R}^2 , on peut s'inspirer du cas des fonctions d'une variable, mais on doit adapter la définition. On se base comme dans le cas des fonctions d'une variable sur un théorème qu'on va ici admettre sans preuve.

THÉOREME 2.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné, à bord régulier par morceaux, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on se donne*

— *une famille finie $c_1^n, c_2^n, \dots, c_{N(n)}^n$ de rectangles de la forme $c_k^n = [a_k^n, b_k^n] \times [a'_k^n, b'_k^n]$, d'intérieur disjoints, telle que*

$$\Omega \supset \bigcup_{k=1}^{N(n)} c_k^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_k c_k^n = \Omega .$$

— *une famille finie $C_1^n, C_2^n, \dots, C_{N(n)}^n$ de rectangles de la forme $C_k^n = [A_k^n, B_k^n] \times [A'_k^n, B'_k^n]$, d'intérieur disjoints, telle que*

$$\Omega \subset \bigcup_{k=1}^{N(n)} C_k^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_k C_k^n = \Omega .$$

On suppose que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_k |b_k^n - a_k^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_k |b'_k^n - a'_k^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_k |B_k^n - A_k^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_k |B'_k^n - A'_k^n| = 0 ,$$

et on pose

$$I(n) = \sum_{k=1}^{N(n)} |b_k - a_k| \cdot |b'_k - a'_k| \min_{x \in c_k^n} f(x) ,$$

$$J(n) = \sum_{k=1}^{N(n)} |B_k - A_k| \cdot |B'_k - A'_k| \max_{x \in C_k^n} f(x) .$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} I(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(n)$. De plus, cette limite ne dépend pas du choix des c_k^n et des C_k^n .

DÉFINITION 2.2. On appelle cette limite l'intégrale de f sur Ω , et on la note

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy .$$

Notons qu'en pratique, la définition est difficile à appliquer pour calculer une intégrale. On va voir dans la suite du chapitre des outils pratiques pour calculer des intégrales.

2.2. Interprétation géométrique. Comme pour les fonctions d'une variable, on peut interpréter l'intégrale d'une fonction définie sur un domaine Ω comme le volume borné par son graphe — il faut à nouveau compter négativement le domaine qui se trouve en-dessous du plan des coordonnées x, y , correspondant aux points où la fonction est négative.

3. Intégrations successives et théorème de Fubini

Le premier cas à considérer est celui où Ω est un rectangle de la forme $[a, b] \times [c, d]$ de \mathbb{R}^2 . Dans ce cas on peut se ramener à calculer successivement deux intégrales, grâce au théorème suivant, qu'on admettra là encore sans démonstration.

THÉORÈME 3.1 (Fubini). Soit $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $a < b$ et $c < d$. Alors

$$\int_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_c^d G(y) dy ,$$

où F et G sont définies par

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy , \quad G(y) = \int_a^b f(x, y) dx .$$

De manière un peu plus générale, on peut intégrer de cette manière sur un domaine qui est "simple" par rapport au système de coordonnées.

THÉORÈME 3.2. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et soient $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions C^1 telles que $u(x) < v(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Soit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ et } u(x) < y < v(x)\} .$$

Finalement, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right) dx .$$

On peut procéder de même en échangeant x et y si nécessaire.

4. Formule de changement de variable

Pour calculer les intégrales de fonctions définies sur des domaines plus compliqués que des rectangles, on sera amené à utiliser la formule de changement de variables. Pour les fonctions de deux variable (ou plus) cette formule est un peu plus compliquée que pour les fonctions d'une variable, et elle utilise la notion de déterminant, dont on va commencer par rappeler la définition et quelques propriétés.

4.1. Rappel sur le déterminant. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On va commencer par rappeler la définition générale du déterminant d'une matrice, même si on l'utilisera rarement dans toute sa généralité.

DÉFINITION 4.1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Le déterminant de M est défini comme suit :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) m_{1\sigma(1)} m_{2\sigma(2)} \cdots m_{n\sigma(n)} .$$

Ici S_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, et $\text{sign}(\sigma)$ désigne la signature de σ , qui vaut 1 ou -1 suivant que σ peut s'écrire comme produit d'un nombre pair ou impair de transpositions. (Une transposition est une permutation qui échange simplement deux éléments.)

Notons que cette définition s'étend telle quelle aux matrices à coefficients complexes.

Exemple. Pour $n = 2$ on a la formule suivante :

$$\det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} .$$

Dans ce cas la somme ci-dessus n'a que deux termes puisqu'il n'y a que deux permutations de l'ensemble à deux éléments $\{1, 2\}$.

Interprétation géométrique. On peut interpréter $|\det(M)|$ comme le volume (ou l'aire, en dimension deux) d'un parallélépipède qui est l'image par M d'un parallélépipède de volume 1 de \mathbb{R}^n , par exemple celui qui correspond à la base canonique de \mathbb{R}^n .

Propriétés essentielles. On rappelle aussi quelques propriétés essentielles du déterminant.

— Il est multilinéaire, c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune des lignes (ou des colonnes) de M . En d'autres termes, si $M = (C_1, \dots, C_n)$, où C_1, \dots, C_n sont ses vecteurs colonnes, et si $C'_k \in \mathbb{R}^n$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$\det(C_1, \dots, aC_k + bC'_k, \dots, C_n) = a \det(C_1, \dots, C_k, \dots, C_n) + b \det(C_1, \dots, C'_k, \dots, C_n) .$$

— Le déterminant est *alterné* : si M' est obtenue à partir de M en échangeant deux lignes (ou deux colonnes) alors $\det(M') = -\det(M)$.

— Si $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\det(MN) = \det(M) \det(N)$.

— Soit $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est M . Alors $\det M = 0$ si et seulement si le noyau de u n'est pas réduit à 0, et aussi si et seulement si l'image de u n'est pas tout \mathbb{R}^n .

4.2. Formule de changement de variable. Considérons une fonction $\phi = (\phi_x, \phi_y) : \mathbb{R}^2$ dans \mathbb{R}^2 .

DÉFINITION 4.2. En chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on appelle $(J_\phi)(x, y)$ la matrice des dérivées partielles de ϕ par rapport à x et y :

$$J_\phi = \begin{pmatrix} \partial\phi_x/\partial x & \partial\phi_x/\partial y \\ \partial\phi_y/\partial x & \partial\phi_y/\partial y \end{pmatrix} .$$

La matrice J_ϕ est appelée matrice Jacobienne de ϕ , d'où la notation.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction de deux variables sur un domaine plus compliqué qu'un rectangle, on utilisera très souvent le résultat suivant.

THÉORÈME 4.3 (Formule de changement de variable). Soit Ω et Ω' deux domaines bornés de \mathbb{R}^2 à bord régulier par morceaux, soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continue, et soit $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ une bijection qui est de classe C^1 et admet une bijection réciproque de classe C^1 . Alors

$$\int_{\Omega'} f(x, y) dx dy = \int_{\Omega} f(\phi(u, v)) |\det J_\phi(u, v)| du dv .$$

Cette formule ressemble à celle rappelée ci-dessus pour les fonctions d'une seule variable. Mais il faut noter la valeur absolue qui entoure le déterminant, qui n'existe pas dans le cas d'une seule variable (elle est remplacée par la convention de signe quand les bornes d'intégration sont inversées).

En fait, le déterminant est indispensable pour tenir compte, dans l'intégration, de la manière dont ϕ agit sur l'aire. Le déterminant permet de donner un poids plus important, dans l'intégrale de droite, des régions qui sont "étirées" par ϕ , c'est-à-dire envoyées par ϕ sur des régions d'aire plus importante.

5. Formule de Green

5.1. Intégrale curviligne. On considère une courbe régulière orientée $C \subset \mathbb{R}^2$, et une paramétrisation $c : (c_x, c_y) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de C , c'est-à-dire que c est une fonction C^1 , dont la dérivée n'est jamais nulle, et qui définit une bijection entre $[a, b]$ et C qui préserve l'orientation.

Note. Dire qu'une courbe est orientée, c'est choisir un sens dans lequel on la parcourt. Dire qu'une paramétrisation préserve l'orientation, c'est dire que la paramétrisation parcourt la courbe "dans le bon sens".

DÉFINITION 5.1. Soit $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On définit l'intégrale de $udx + vdy$ sur la courbe orientée C comme

$$\int_C udx + vdy = \int_a^b u(c(t))c'_x(t) + v(c(t))c'_y(t)dt .$$

Remarque. Cette intégrale ne dépend pas de la paramétrisation de C choisie, tant qu'elle respecte l'orientation. En effet si $\bar{c} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est une autre paramétrisation de C respectant l'orientation, on peut poser $\phi = \bar{c}^{-1} \circ c : [a, b] \rightarrow [c, d]$, c'est une application C^1 , bijective, et dont la dérivée ne s'annule jamais, si bien que la bijection réciproque est aussi C^1 . De plus on a par définition

$$\bar{c} \circ \phi = c ,$$

si bien que, d'après la règle de dérivation d'une fonction composée,

$$(c'_x(t), c'_y(t)) = c'(t) = \phi'(t)\bar{c}'(\phi(t)) = \phi'(t)(\bar{c}'_x(\phi(t)), \bar{c}'_y(\phi(t))) .$$

On en déduit que

$$\int_a^b u(c(t))c'_x(t) + v(c(t))c'_y(t)dt = \int_a^b u(\bar{c} \circ \phi(t))\phi'(t)\bar{c}'_x(\phi(t)) + v(\bar{c} \circ \phi(t))\phi'(t)\bar{c}'_y(\phi(t))dt$$

et, d'après la formule de changement de variable avec $t = \phi(s)$,

$$\int_a^b u(c(t))c'_x(t) + v(c(t))c'_y(t)dt = \int_c^d u(\bar{c}(s))\bar{c}'_x(s) + v(\bar{c}(s))\bar{c}'_y(s)ds .$$

L'intégrale sur C est donc bien indépendante du paramétrage choisi, tant qu'il respecte l'orientation.

Par contre, si on prend un paramétrage qui renverse l'orientation, un signe $-$ apparaît dans l'intégration !

Interprétation. On peut interpréter cette intégration comme celle d'un champ de vecteurs, de coordonnées (u, v) , le long d'une courbe orientée. C'est une interprétation courante en physique.

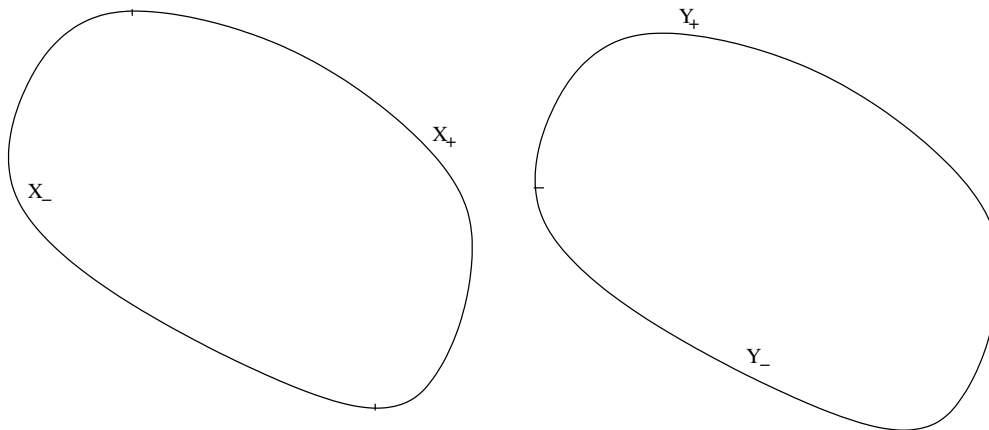


FIGURE 2. Preuve du théorème de Green : cas particulier

5.2. Orientation des bords des domaines de \mathbb{R}^2 . Considérons un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ à bord régulier par morceaux. Son bord est donc constitué d'une suite de courbes régulières. On utilise toujours l'orientation du bord dans le sens dit "trigonométrique", qui est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre.

Ainsi, l'orientation du bord est définie par la convention que, quand on parcourt le bord dans le sens positif, le domaine se trouve du côté gauche.

5.3. Formule de Green.

THÉORÈME 5.2 (Formule de Green). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné à bord régulier par morceaux. Soient $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions C^1 . Alors*

$$\int_{\partial\Omega} u dx + v dy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy .$$

Plutôt que faire une preuve complète, on va se contenter de considérer un cas particulier, dont on pourrait déduire le cas général, qui permet de comprendre pourquoi la formule de Green est valide.

PRINCIPE DE LA PREUVE. On se limite d'abord au cas particulier où Ω est tel que son bord peut se décomposer de deux manières différentes :

- comme la réunion de deux courbes, régulières par morceaux, sur laquelle la coordonnée x est monotone — croissante sur l'une, décroissante sur l'autre, avec l'orientation naturelle du bord,
- comme la réunion de deux courbes, régulières par morceaux, sur laquelle la coordonnée y est monotone.

On note a, b le min et le max de la coordonnée x sur $\partial\Omega$, si bien que $\partial\Omega$ est la réunion de deux courbes, qui sont le graphe respectivement de fonctions Y_- et Y_+ de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . La première est parcourue dans le sens des x croissants, la seconde dans le sens des x décroissants. De même, si c, d sont le min et le max de y sur $\partial\Omega$, on peut voir $\partial\Omega$ comme la réunion des graphes de deux fonctions de y , soit X_- et X_+ , la première étant parcourue dans le sens des y décroissants, la seconde des y croissants.

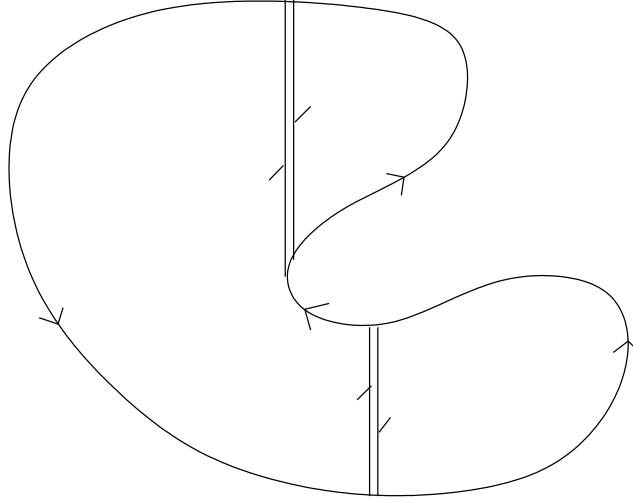


FIGURE 3. Preuve du théorème de Green : découpage

Maintenant on peut décomposer l'intégrale sur Ω en deux intégrales successives comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy &= \int_{y=c}^d \left(\int_{x=X_-(y)}^{X_+(y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \int_{y=c}^d v(X_+(y)) - v(X_-(y)) dy \\ &= \int_{\partial\Omega} v dy . \end{aligned}$$

Les signes qui apparaissent correspondent en effet exactement au sens de parcourt des deux composantes du bord.

De même on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy &= \int_{x=a}^b \left(\int_{y=Y_-(x)}^{Y_+(x)} \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_{x=a}^b u(Y_+(x)) - u(Y_-(x)) dx \\ &= - \int_{\partial\Omega} u dx . \end{aligned}$$

La formule de Green suit en ajoutant les deux termes.

Pour traiter des cas plus généraux, lorsque Ω ne satisfait pas l'hypothèse ci-dessus, on le découpe en sous-domaines qui la satisfont, c'est-à-dire qu'on écrit $\Omega = \cup_{i=1}^N \Omega_i$, où les Ω_i sont des domaines à bord régulier par morceaux, d'intérieur disjoint, et qui satisfont cette hypothèse. On remarque alors que d'une part l'intégrale sur Ω est la somme des intégrales sur les Ω_i , par définition. D'autre part, l'intégrale de $u dx + v dy$ sur $\partial\Omega$ est la somme des intégrales sur les $\partial\Omega_i$, parce que chaque segment de $\partial\Omega$ y apparaît exactement une fois, alors que les segments des $\partial\Omega_i$ qui ne sont

pas dans $\partial\Omega$ sont chacun parcourus exactement deux fois, avec des orientations opposées, si bien qu'ils se compensent exactement (voir la figure 2). \square

6. Théorème de Stokes

6.1. Intégration d'un champ de vecteurs le long d'une courbe. On a vu plus haut comment intégrer une expression de la forme $udx + vdy$ sur une courbe orientée dans le plan. En fait, on peut voir cela comme l'intégration d'un champ de vecteurs du plan le long d'une courbe orientée. On peut étendre cette définition aux courbes dans l'espace à trois dimensions.

DÉFINITION 6.1. Soit V un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 , de coordonnées (u, v, w) , et soit $C \subset \mathbb{R}^3$ une courbe orientée munie d'une paramétrisation $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ respectant l'orientation. On définit l'intégrale de V sur C comme

$$\int_C V \cdot dr = \int_a^b V \cdot c'(t) dt ,$$

où \cdot désigne le produit scalaire.

Rappelons que le produit scalaire de deux champs de vecteurs V et V' de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') est la fonction égale à

$$V \cdot V' = uu' + vv' + ww' .$$

Exercice. Montrer que, comme dans le plan, l'intégrale ne dépend pas du choix de la paramétrisation tant qu'elle respecte l'orientation, mais qu'elle change de signe si on change l'orientation.

6.2. Intégration des fonctions sur les surfaces dans \mathbb{R}^3 .

DÉFINITION 6.2. Une surface $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ est orientée si elle est munie d'un champ de vecteurs orthogonal unitaire.

Le champ de vecteurs détermine un "coté" de la surface. A noter que si une surface est le bord d'un domaine borné de \mathbb{R}^3 (par exemple une sphère) alors on peut la munir d'une orientation (par exemple en choisissant en chaque point le vecteur unitaire orthogonal vers l'extérieur). A l'opposé, il existe des surfaces dans \mathbb{R}^3 qui ne sont pas orientables, par exemple un ruban de Möbius.

DÉFINITION 6.3. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientée, munie d'un champ de vecteur normal unitaire N , et soit $\phi : \Omega \rightarrow \Sigma$ une paramétrisation. On dit que ϕ respecte l'orientation si on a en tout point

$$\partial_x \phi \times \partial_y \phi \cdot N > 0 .$$

On peut aussi définir une orientation naturelle du bord d'une surface orientée dans \mathbb{R}^3 . La définition est la suivante : on parcourt le bord dans le sens positif si, lorsqu'on se place de manière à avoir la normale unitaire vers le haut, on a la surface du coté gauche. Cette définition généralise celle des surfaces dans le plan.

On peut maintenant donner la définition de l'intégrale d'une fonction sur une surface.

DÉFINITION 6.4. Soit Σ une surface orientée munie d'une paramétrisation $\phi : \Omega \rightarrow \Sigma$ qui préserve l'orientation. Soit $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit son intégrale sur Σ comme

$$\int_{\Sigma} u d\Sigma = \int_{\Omega} u \circ \phi (\partial_x \phi \times \partial_y \phi) \cdot N dx dy .$$

On verra dans les exercices que cette notion d'intégrale est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de la paramétrisation (respectant l'orientation) choisie.

Interprétation géométrique. Comme $\partial_x\phi$ et $\partial_y\phi$ sont tangents à la surface, $\partial_x\phi \times \partial_y\phi$ lui est orthogonal, donc tangent à N . Si la paramétrisation ϕ préserve l'orientation, il est de plus dans le même sens. En fait $(\partial_x\phi \times \partial_y\phi) \cdot N$ est égal à l'aire du parallélogramme engendré par $\partial_x\phi$ et $\partial_y\phi$ (on peut le vérifier en prenant un repère adapté). Ce terme, dans l'intégration, permet donc de tenir compte du rapport entre l'aire sur la surface et l'aire du domaine Ω .

6.3. Intégration des champs de vecteurs sur les surfaces dans \mathbb{R}^3 . On peut donner une définition analogue pour les champs de vecteurs.

DÉFINITION 6.5. Soit Σ une surface orientée munie d'une paramétrisation $\phi : \Omega \rightarrow \Sigma$ qui préserve l'orientation. Soit $F : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs continu. On définit son intégrale sur Σ comme

$$\int_{\Sigma} F \cdot d\Sigma = \int_{\Omega} (\partial_x\phi \times \partial_y\phi) \cdot F dx dy .$$

Interprétation géométrique. On a vu que $\partial_x\phi \times \partial_y\phi$ est parallèle à N et dans le même sens, et que sa norme est liée à l'aire de la surface. Il suit que $(\partial_x\phi \times \partial_y\phi) \cdot F$ mesure la composante de F orthogonale à la surface, multipliée par un terme qui tient compte de l'aire. En fait l'intégrale qu'on a définie est le *flux* de F à travers la surface Σ .

6.4. Rotationnel des champs de vecteurs. On va utiliser la notion de rotationnel d'un champ de vecteurs, que vous connaissez probablement déjà.

DÉFINITION 6.6. Soit V un champ de vecteurs régulier sur \mathbb{R}^3 , de coordonnées (V_x, V_y, V_z) . Son rotationnel est le champ défini par

$$\nabla \times V = (\partial_y V_z - \partial_z V_y, \partial_z V_x - \partial_x V_z, \partial_x V_y - \partial_y V_x) .$$

6.5. Formule de Stokes pour les surfaces dans \mathbb{R}^3 .

THÉORÈME 6.7. Soit Σ une surface à bord régulier par morceaux, bornée, dans \mathbb{R}^3 , et soit V un champ de vecteurs défini sur \mathbb{R}^3 . Alors

$$\int_{\Sigma} \nabla \times V \cdot d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} V \cdot dr .$$

On ne donne pas ici de preuve de cette formule, on va se contenter de voir que, dans un cas particulier, on se ramène à la formule de Green.

Exemple. Supposons que Σ est contenue dans le plan xOy , c'est-à-dire le plan d'équation $\{z = 0\}$. Alors l'équation se ramène à

$$\int_{\Sigma} \partial_x F_y - \partial_y F_x dx dy = \int_{\partial\Sigma} F_x dx + F_y dy ,$$

donc à la formule de Green.

6.6. Généralisations. En fait la formule de Green et la formule de Stokes présentées ici sont deux cas particuliers d'un résultat beaucoup plus général et central dans les mathématiques contemporaines qui porte aussi le nom (!) de formule de Stokes. On peut considérer sur \mathbb{R}^n une notion de *forme différentielle* de degré k , où k est n'importe quel entier entre 0 et n . Une 0-forme est une fonction, une 1-forme peut être identifiée à un champ de vecteurs, etc. On note Λ^k l'espace vectoriel des k -formes. On a aussi un opérateur de *différentielle extérieure* $d : \Lambda^k \rightarrow \Lambda^{k+1}$. La formule de Stokes est simplement que pour toute k -forme $\omega \subset \Lambda^k$ et toute "surface" V de dimension $k + 1$ on a

$$\int_V d\omega = \int_{\partial V} \omega .$$

C'est sous cette forme qu'il est le plus simple de montrer la formule de Stokes.

7. Exercices

Intégrales d'une fonction d'une variable.

7.1. Calculer en fonction de $a, b, c \in \mathbb{R}$ l'intégrale entre a et b des fonctions qui à x associent :

- (1) xe^{x^2} ,
- (2) $\sinh(cx)$,
- (3) e^x ,
- (4) $1/\cosh(cx)^2$,
- (5) $1/(1+(cx)^2)$,
- (6) $1/\sqrt{1+(cx)^2}$,
- (7) $1/\sqrt{1-(cx)^2}$.

On précisera dans chaque cas quelles conditions il faut mettre sur a, b, c pour que l'intégrale ait un sens.

7.2. Primitives de fonctions usuelles. Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

- (1) $t \mapsto t^n \ln(t)$, pour $n \geq 1$,
- (2) $t \mapsto \arctan(t)$.

7.3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin(t)^n dt .$$

Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Déterminants.

7.4. Calculer en fonction de t les déterminants des matrices 2×2 suivantes.

$$\begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cosh(t) & 2\sinh(t) \\ \sinh(t) & 2\cosh(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2t+1 & (2t+1)^2 \\ 1 & 2t-1 \end{pmatrix} .$$

7.5. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.6. Volumes de parallélogrammes et de parallélépipèdes.

(1) Calculer l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(2) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(3) Montrer que le volume d'un parallélépipède dont les sommets sont des points de \mathbb{R}^3 à coefficients entiers est un nombre entier.

Calculs d'intégrales par intégration successive.

7.7. Δ . Calculer l'intégrale sur $[0, 1] \times [1, 3]$ de la fonction définie par $f(x, y) = xy + y^2$.

7.8. Δ .

- (1) Déterminer l'aire de la partie bornée D du plan délimitée par les courbes d'équation $y = x$ et $y^2 = x$.
- (2) Calculer l'intégrale sur D de la fonction définie par $f(x, y) = x + y$.

7.9.

- (1) Calculer l'intégrale de la fonction f définie par $f(x, y) = x^2y$ sur le domaine D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0, x + y < 1, y - x < 1\}.$$

- (2) Même question pour $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ et

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y < \pi\}.$$

7.10. Calculer

$$\int_{0 \leq y \leq x \leq 1} \frac{y}{(1+x^2)} dx dy.$$

Changements de variable.

7.11. Déterminer le centre de gravité d'un demi-disque réalisé dans un matériau homogène.

7.12. *. Soit $a > 0$, et soit

$$T_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < a\}.$$

Calculer

$$\int_{T_a} \sqrt{xy} e^{-x-y} dx dy.$$

(Indication : On pourra utiliser le changement de variable $x = tu, y = (1-t)u$.)

7.13. *. On souhaite calculer l'intégrale entre 0 et ∞ de e^{-x^2} .

- (1) Soit $R > 0$, et soit $D_R = [0, R] \times [0, R]$. Montrer que

$$\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2.$$

- (2) Soit $r > 0$, notons

$$C_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < r^2\}.$$

Calculer

$$I(r) = \int_{C_r} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

- (3) Montrer que pour tout $r > 0$,

$$I(r) \leq \int_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I(\sqrt{2}r).$$

- (4) En déduire la valeur de l'intégrale entre 0 et ∞ de e^{-x^2} .

Intégrale curviligne.

7.14. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C (x+y)dx + (x-y)dy$$

où C est le cercle unité, paramétré dans le sens trigonométrique.

7.15. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_C \frac{(y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz}{x^2 + y^2}$$

lorsque C est :

- (1) Le segment de droite dont les extrémités sont les points de coordonnées $(1, 1, 1)$ et $(2, 2, 2)$,
- (2) le segment d'hélice paramétré par la fonction qui à t associe $(\cos t, \sin t, t)$ pour $t \in [0, 2\pi]$.

Formule de Green.

7.16. Soit D le domaine borné bordé par la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Calculer en utilisant la formule de Green

$$\int_D (x^2 - y^2) dx dy .$$

7.17. Soit C la courbe fermée constituée d'un segment de la parabole d'équation $x^2 = y$ et d'un segment de la parabole d'équation $y^2 = x$, et soit D le domaine borné qu'elle délimite.

- (1) Calculer

$$\int_C (2xy - x^2)dx + (x + y^2)dy .$$

- (2) Vérifier le résultat avec la formule de Green.

Intégration sur une surface de \mathbb{R}^3 .

7.18. * Soit Σ une surface orientée dans \mathbb{R}^3 , munie d'un champ de vecteurs orthogonal unitaire N , et soit $u : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne deux paramétrisations respectant l'orientation $\phi : \Omega \rightarrow \Sigma$ et $\phi' : \Omega' \rightarrow \Sigma$ de Σ par des ouverts de \mathbb{R}^2 . Montrer que la définition de l'intégrale de u sur Σ ne dépend pas de la paramétrisation choisie, c'est-à-dire que :

$$\int_{\Omega} u(\phi(x, y))(\partial_x \phi \times \partial_y \phi) \cdot N dx dy = \int_{\Omega'} u(\phi'(x, y))(\partial_x \phi' \times \partial_y \phi') \cdot N dx dy .$$

Formule de Stokes.

7.19. Calculer le flux du champ de vecteurs $(x, y, -z)$ à travers la demi-sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$.

7.20. Soit C le cercle de \mathbb{R}^3 d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x + y + z = 0$. Calculer

$$\int_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$$

d'abord en appliquant la formule de Stokes, puis directement.

CHAPITRE 2

Suites et séries de fonctions

Motivations

Ce chapitre est consacré à l'étude des suites et des séries de fonctions.

La raison principale pour laquelle il nous est nécessaire de les étudier est que, dans les chapitres suivants, nous allons développer les séries de Fourier puis la transformée de Fourier. Or une série de Fourier est une exemple emblématique de série de fonction, et il est nécessaire, pour pouvoir comprendre convenablement le comportement des séries de Fourier, de disposer de quelques notions plus générales. Lesquelles seront utiles aussi dans d'autres parties du cours, par exemple pour la transformée de Laplace.

Néanmoins la notion de suite ou de série de fonction a un intérêt beaucoup plus vaste, puisque ces notions apparaissent dès qu'on cherche à approcher une fonction inconnue — par exemple la solution d'une équation physique ou provenant d'un problème d'ingénierie — par des approximations, par exemple provenant de calculs approchés avec une solution de plus en plus grande.

Les notions élémentaires présentées dans ce chapitre devraient donc vous être utiles à de multiples reprises au cours de vos études ultérieures.

Un peu d'histoire

La notion de convergence de suite de fonctions était utilisée dès le début du XIXe siècle, et peut-être avant, en particulier dans le contexte des séries de Fourier. Elle n'était pourtant pas formalisée de manière rigoureuse.

Une histoire souvent répétée (peut-être en partie fausse) veut que Cauchy (1789-1857) ait enseigné dans un cours à l'Ecole Polytechnique que la limite d'une suite de fonctions continues est continue, mais que Abel (1802-1829) ait réalisé quelques années plus tard, en 1826, que des exemples provenant des séries de Fourier montraient que c'est faux. Ceci conduisit Cauchy à donner en 1853 un fondement rigoureux à la notion de convergence d'une suite de fonction, et à corriger l'erreur qu'il avait commise 30 ans plus tôt.

Objectifs du chapitre

Les objectifs du chapitre seront en particulier :

- comprendre la notion de convergence simple et de convergence uniforme d'une suite de fonction, savoir reconnaître les suites de fonctions qui convergent en un sens ou en l'autre,
- connaître les principales propriétés de la convergence uniforme,
- savoir faire des raisonnements élémentaires utilisant la notion de convergence d'une suite réelle, d'une suite de fonctions,
- comprendre les notions de convergence simple, de convergence uniforme, de convergence normale, pour une série de fonctions,
- savoir calculer le rayon de convergence d'une série entière,

- connaître et savoir utiliser les principales propriétés des séries entières dans leur disque de convergence.

1. Suites de fonction

On va introduire deux notions de convergence pour une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , ou plus généralement d'un intervalle I de \mathbb{R} vers \mathbb{R} ou vers \mathbb{C} .

1.1. Convergence simple. La première notion s'applique lorsque la convergence se produit en chaque point — on parle de convergence simple.

DÉFINITION 1.1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un intervalle I de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f si, pour tout $x \in I$ la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Forme équivalente : la définition de la limite d'une suite montre directement que (f_n) converge simplement vers f sur I si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon .$$

Exemple. Considérons la suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définies par $f_n(x) = \tanh(nx)$, $n \geq 1$. On peut voir facilement qu'elle converge simplement vers la fonction f définie par $f(0) = 0$, $f(x) = -1$ pour $x < 0$, $f(x) = 1$ pour $x > 0$. En effet :

- $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, et cette suite converge vers 0,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \tanh(nx) = 1$ pour tout $x > 0$,
- il en est de même pour $x < 0$ et la limite est -1 .

On dispose par ailleurs de quelques propriétés de la convergence simple, par exemple les trois suivantes.

PROPOSITION 1.2. Soit (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions sur un intervalle I , qui convergent respectivement vers des limites f et g . Supposons que pour tout $x \in I$ et tout n , $f_n(x) \geq g_n(x)$. Alors pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la même propriété pour les suites : si $x_n \leq y_n$ pour tout n et si $\lim x_n = x$, $\lim y_n = y$, alors $x \leq y$. \square

PROPOSITION 1.3. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes, qui converge simplement vers une limite f sur un intervalle I . Alors f est croissante sur I .

DÉMONSTRATION. Soit $x, y \in I$, $x \leq y$. On va appliquer deux fois la définition de la convergence, et utiliser la croissance des f_n .

Choisissons $\epsilon > 0$. Il existe $N_x \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_x$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. De même, il existe $N_y \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_y$, $|f_n(y) - f(y)| \leq \epsilon$.

On prend maintenant $n = \max(N_x, N_y)$, sibi que $n \geq N_x$ et $n \geq N_y$. On voit alors que

$$f(x) \leq f_n(x) + \epsilon \leq f_n(y) + \epsilon \leq f(y) + 2\epsilon .$$

Comme $f(x) \leq f(y) + 2\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$, on voit que $f(x) \leq f(y)$, donc la fonction limite f est croissante. \square

Enfin la dernière propriété concerne convexité des fonctions, notion qu'on rappelle d'abord.

DÉFINITION 1.4. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$, $f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$.

On rappelle que pour les fonctions C^2 , la convexité est équivalente à la positivité (au sens large) de la dérivée seconde.

PROPOSITION 1.5. *Soit (f_n) une suite de fonctions convexes, qui converge simplement vers une limite f sur un intervalle I . Alors f est convexe sur I .*

La preuve est laissée en exercice.

1.2. Convergence uniforme.

DÉFINITION 1.6. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions, qui converge simplement vers une limite f sur un intervalle I . On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_I |f - f_n| = 0 .$$

Forme équivalente : on peut montrer facilement que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si la condition suivante est remplie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon .$$

Noter la différence avec la convergence simple : on a simplement échangé deux quantificateurs !

1.3. Continuité de la limite.

THÉORÈME 1.7 (Continuité de la limite). *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une limite u . Alors u est continue.*

DÉMONSTRATION. Soit $x \in I$, et soit $\epsilon > 0$. Comme (u_n) converge uniformément vers u sur I , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_I |u_n - u| \leq \epsilon/3$.

De plus, u_N est continue en x , donc

$$\exists \alpha > 0, \forall y \in [x - \alpha, x + \alpha], |u_N(x) - u_N(y)| \leq \epsilon/3 .$$

Il suit que pour tout $y \in [x - \alpha, x + \alpha]$,

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_N(x)| + |u_N(x) - u_N(y)| + |u_N(y) - u(y)| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 .$$

Pour résumer on a donc obtenu que

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in [x - \alpha, x + \alpha], |u(x) - u(y)| \leq \epsilon ,$$

en d'autres termes u est continue. □

NB. l'exemple donné ci-dessus des fonctions $x \rightarrow \tanh(nx)$ montre que l'énoncé correspondant avec la convergence simple est faux.

1.4. Intégrale d'une suite de fonctions. La convergence uniforme permet d'intégrer une suite de fonctions, de la manière suivante.

THÉORÈME 1.8. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur un intervalle I vers une limite f . Alors pour tout $a, b \in I$ on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt .$$

DÉMONSTRATION. Soit $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\sup_I |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$. On voit alors que pour $n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq \int_a^b \epsilon dt \leq |b - a| \epsilon .$$

On en déduit le résultat. □

1.5. Convergence uniforme sur les compacts. On va parfois utiliser une notion un peu élargie de convergence uniforme : la convergence uniforme sur les compacts.

DÉFINITION 1.9. Soit (f_n) une suite de fonctions sur un intervalle I , qui converge simplement vers une limite f . On dit que (f_n) converge uniformément vers f sur les compacts de I si, pour tout $a, b \in I$, la suite des restriction des f_n à $[a, b]$ converge uniformément vers la restriction de f à $[a, b]$.

Exemple. Reprenons l'exemple ci-dessus des fonctions de la forme $x \rightarrow \tanh(nx)$. Ces fonctions ne convergent pas uniformément sur \mathbb{R} , et pas non plus sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par contre elles convergent uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

THÉORÈME 1.10. Soit (u_n) une suite de fonctions C^1 définies sur un intervalle I de \mathbb{R} contenant 0, telle que $(u_n(0))$ converge vers une limite u_0 . Supposons que la suite des dérivées (u'_n) converge uniformément vers une limite v . Alors (u_n) converge uniformément sur les compacts vers une limite u .

DÉMONSTRATION. Ca va être une conséquence du théorème 1.8. On montre d'abord la convergence simple. Soit $x \in I$, alors

$$u_n(x) = \int_0^x u'_n(t) dt \rightarrow \int_0^x v(t) dt$$

ce qui montre que (u_n) converge simplement vers la primitive de v qui vaut u_0 en 0.

Pour montrer que la convergence est uniforme sur les compacts, on va montrer qu'elle est uniforme sur les intervalles de la forme $[-R, R]$ pour tout $R > 0$, ce qui démontrera le résultat car tout intervalle $[a, b]$ est inclus dans $[-R, R]$ pour R assez grand.

Or on remarque que pour tout $x \in [-R, R]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \int_0^x |u'_n(t) - v(t)| dt \leq R \sup_{t \in [-R, R]} |u'_n(t) - v(t)|.$$

Le résultat suit donc par définition de la convergence uniforme. □

2. Séries de fonctions

On passe maintenant des suites de fonctions aux séries de fonctions, qui sont des sommes (infinies) dont l'étude se fait en partie de la même manière. Une nouvelle notion apparaît, celle de convergence normale.

2.1. Définitions.

DÉFINITION 2.1. Une série de fonction est une expression de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n,$$

où chaque f_n est une fonction définie sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} ou \mathbb{C} , à valeurs dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}).

On peut associer à chaque série de fonctions une suite, celle de ses "sommes partielles".

DÉFINITION 2.2. Si $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est une série de fonction, la suite de ses sommes partielles est la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n f_k .$$

On définit la suite de ses restes comme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k .$$

On peut maintenant définir les notions de convergence simple et de convergence uniforme d'une série de fonctions, en se ramenant aux suites de fonctions étudiées dans la section précédente.

DÉFINITION 2.3. On dit qu'une série de fonction converge simplement, ou simplement qu'elle converge, si la suite de ses sommes partielles, considérée comme une suite de fonctions, converge simplement. On dit que la série converge uniformément si la suite de ses sommes partielles converge uniformément.

Par définition, la série $\sum_n f_n$ converge si et seulement si, pour chaque $x \in I$, la série (numérique) $\sum_n f_n(x)$ converge. On peut donner un critère un peu plus élaboré en utilisant la suite des restes.

PROPOSITION 2.4. La série de fonctions $\sum_k f_k$ converge si et seulement si, pour tout $x \in I$, la suite $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie. Elle tend alors nécessairement vers 0. La série $\sum f_n$ converge uniformément si et seulement si de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in I} |R_n(x)| = 0 .$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in I$. La série $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ converge. Donc la série $\sum_k f_k$ converge si et seulement si, pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n(x)$ est bien définie.

De plus, si $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) = 0$, et donc $(R_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

Supposons maintenant que $\sum_k f_k$ converge, soit S sa somme. La convergence est uniforme si et seulement si la suite des sommes partielles (S_n) converge uniformément vers S , donc si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sup_I |S_n - S| \leq \epsilon .$$

Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$S_n + R_n = \sum_{k=0}^n f_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k = S ,$$

donc (S_n) converge uniformément vers S si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \sum_I |R_n| \leq \epsilon ,$$

donc si et seulement si (R_n) converge uniformément vers 0. \square

On rappelle aussi la définition de la convergence absolue. C'est une notion qui est utile pour les séries numériques, mais qui s'adapte directement aux séries de fonction.

DÉFINITION 2.5. Une série de fonctions $\sum_k f_k$ est absolument convergente si la série des valeurs absolues, $\sum_k |f_k|$, est convergente.

2.2. Propriétés de la convergence uniforme. On peut tout d'abord relier la convergence d'une série de fonctions à la suite de ses termes. Les énoncés suivants fournissent des outils pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas simplement, resp. uniformément.

THÉORÈME 2.6. *Soit $\sum_k f_k$ une série de fonctions définies sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Si elle converge, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Si la série de fonctions $\sum_k f_k$ converge uniformément, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.*

DÉMONSTRATION. Le premier point est une conséquence du fait que, si une série numérique converge, alors son terme général tend vers zéro.

Pour le second point, supposons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers 0. Traduisons-le en écrivant la négation de la définition de la convergence uniforme vers 0 :

$$\exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \exists x \in I, \sup_I |f| \geq \epsilon .$$

Mais si (R_n) est la suite des restes de la série $\sum_k f_k$, on a par définition : $R_k - R_{k+1} = f_k$. Il suit que, pour les n qui apparaissent ci-dessus, on a

$$\sup_I |R_n - R_{n+1}| \geq \epsilon ,$$

et donc soit $\sup_I |R_n| \geq \epsilon/2$, soit $\sup_I |R_{n+1}| \geq \epsilon/2$. La suite de fonctions (R_k) ne peut donc pas converger uniformément vers 0, et il suit de la proposition 2.4 que la série $\sum_k f_k$ ne peut pas converger uniformément. \square

Comme pour les suites de fonctions, la convergence uniforme permet de conclure à la continuité de la somme.

THÉORÈME 2.7. *Soit $\sum_k f_k$ une série de fonctions, et F sa somme. Si $\sum_k f_k$ converge uniformément, alors F est continue.*

DÉMONSTRATION. Par définition, si $\sum_k f_k$ converge uniformément et sa somme est F , alors la suite de ses sommes partielles (S_n) converge uniformément vers F . Comme les S_n sont des sommes finies de fonctions continues, elles sont continues. Ainsi F est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue. \square

On peut par ailleurs intégrer sur une intervalle borné une série de fonctions qui converge uniformément.

THÉORÈME 2.8. *Soit $\sum_k f_k$ une série de fonctions qui converge uniformément sur un intervalle I de \mathbb{R} , et soit F sa somme. Soit $a, b \in I, a < b$. Alors*

$$\int_a^b F(t)dt = \sum_k \int_a^b f_k(t)dt .$$

DÉMONSTRATION. Soit (S_n) la suite des sommes partielles. On sait qu'elle converge uniformément vers F , si bien que, par un théorème du chapitre précédent,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(t)dt = \int_a^b F(t)dt .$$

Mais pour tout n on a

$$\int_a^b S_n(t)dt = \int_a^b \sum_{k=0}^n f_k(t)dt = \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t)dt .$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b F(t) dt$$

ce qui montre bien que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(t) dt = \int_a^b F(t) dt .$$

□

2.3. Convergence normale. On introduit maintenant une autre forme de convergence d'une série de fonctions, plus forte, mais aussi plus facile à vérifier dans beaucoup de cas, que la convergence uniforme.

DÉFINITION 2.9. *On dit qu'une série de fonctions $\sum_k f_k$ définie sur un sous-ensemble I de \mathbb{R} ou \mathbb{C} est absolument convergente si la série numérique $\sum_k \sup_I |f_k|$ converge.*

THÉORÈME 2.10. *Si une série de fonction converge normalement, alors elle converge uniformément.*

DÉMONSTRATION. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. On a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \sup_I |f_k| .$$

En passant à la limite quand $p \rightarrow \infty$, on obtient que

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} \sup_I |f_k| .$$

Par hypothèse, le terme de droite tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, donc $\sup_I |R_n| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, si bien que la série converge uniformément d'après la proposition 2.4. □

Comme pour les suites de fonctions, on peut parler de convergence uniforme, ou de convergence normale, sur les compacts.

3. Séries entières

Dans la troisième et dernière partie de ce chapitre, on va se concentrer sur des séries de fonctions très particulières, qui jouent un rôle naturel dans beaucoup de domaines des mathématiques et de la physique, les séries entières. Ces séries interviennent par exemple quand on veut faire un développement "de Taylor" d'une fonction à un ordre infini — il se trouve qu'on peut toujours le faire pour les fonctions analytiques complexes.

3.1. Définition, rayon de convergence. Donnons d'abord la définition générale.

DÉFINITION 3.1. *Une série entière est une expression de la forme*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k ,$$

où z est une variable complexe et les a_k sont des nombres complexes.

Dans certains cas, cette série peut ne converger pour aucune valeur non nulle de z . Mais dans tous les cas, son comportement est essentiellement déterminé par un nombre, son rayon de convergence.

DÉFINITION 3.2. Soit $\sum_k a_k z^k$ une série entière. Son rayon de convergence est défini comme

$$R = \sup\{r \geq 0 \mid \lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| r^k = 0\}.$$

Le disque ouvert de convergence D_o de la série est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| < R$. Son disque fermé de convergence D_f est l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| \leq R$.

En général, le rayon de convergence peut être nul, mais on s'intéressera surtout aux cas où il est strictement positif. Il peut aussi être infini, par exemple dans le cas de la série entière $\sum_k e^{n^2} z^n$.

THÉORÈME 3.3. Soit $\sum_k a_k z^k$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors

- (1) La série de fonctions $\sum_k a_k z^k$ converge normalement sur les compacts de son disque ouvert de convergence.
- (2) Pour tout $z \notin D_f$, la série numérique $\sum_k a_k z^k$ diverge.

On rappelle qu'un sous-ensemble du plan (ou du plan complexe) est compact s'il est fermé et borné. De plus, toute fonction continue définie sur un ensemble compact atteint sa borne supérieure (resp. sa borne inférieure).

DÉMONSTRATION. Soit $K \subset D_o$ un compact du disque ouvert de convergence. La fonction définie comme la distance à 0 est continue sur K , elle y atteint donc sa borne supérieure, soit r , en un point $x \in K$, et $r < R$ puisque $x \in D_o$.

La définition du rayon de convergence indique donc qu'il existe r' strictement compris entre r et R tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| r'^k = 0$. En particulier, cette suite est bornée, il existe donc $C > 0$ tel que $|a_k| r'^k \leq C$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On a alors pour tout $z \in K$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$|a_k z^k| \leq |a_k| r'^k (|z|/r')^k \leq C (|z|/r')^k.$$

Le terme général de la série $\sum_k a_k z^k$ est donc borné par le terme général d'une série géométrique convergente, et ce quel que soit $z \in K$. On en déduit le premier point.

Pour le second point on note que si $|z| > R$ alors, par définition même de R , la suite $(|a_k| |z|^k)$ ne tend pas vers 0, et la série entière ne peut donc pas converger en z . \square

COROLLAIRE 3.4. Toute série entière converge uniformément sur les compacts de son disque ouvert de convergence, et sa somme est une fonction continue.

Sachant qu'une série entière converge "bien" dans son disque ouvert de convergence, et qu'elle diverge en dehors du disque de convergence, on peut se demander ce qu'il en est sur le bord du disque de convergence (le cercle de rayon R). Mais il est difficile de donner des énoncés généraux à ce sujet. En fait la restriction d'une série entière à un cercle de rayon r centré en 0 est fortement liée aux séries de Fourier qu'on verra dans un chapitre ultérieur, puisqu'on peut les écrire sous la forme $\sum_k (a_k r^k) e^{ki\theta}$, si $z = r e^{i\theta}$.

3.2. Dérivation des séries entières. On étudie maintenant les séries entières restreintes à une variable réelle qu'on appellera t (pour marquer la différence avec la variable z qui est habituellement complexe). Les coefficients a_k peuvent ici être réels ou complexes.

THÉORÈME 3.5. Soit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ une série entière de rayon de convergence R , de somme S . Alors S est dérivable sur $] -R, R[$, la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k t^{k-1}$ a pour rayon de convergence R , et sa somme est la dérivée S' de S .

En d'autres termes, la série obtenue en dérivant chacun des termes a même rayon de convergence que la série dont on part, et sa somme est la dérivée de la somme de la série de départ.

DÉMONSTRATION. Soit maintenant $r' \in]0, R[$, et soit $r \in]r', R[$. Par définition du rayon de convergence R de $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n r^n = 0 .$$

Alors pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on a

$$k a_k r'^{k-1} = a_k r^k \left(\frac{r'}{r} \right)^k \left(\frac{k}{r'} \right) .$$

Mais $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k r^k = 0$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^k \left(\frac{k}{r'} \right) = 0 ,$$

si bien que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k a_k r'^{k-1} = 0 .$$

Il suit que le rayon de convergence R' de la série entière $\sum k a_k r'^{k-1}$ est au moins égal à R .

Le même argument montre que si $r' > R$, alors $\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k r'^{k-1} \neq 0$, parce que si $r \in]R, r'[$ alors $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k r^k \neq 0$ et

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^k \left(\frac{k}{r'} \right) = \infty .$$

Il suit que $R' \leq R$, et donc que $R' = R$.

On peut maintenant appliquer le théorème 2.8 à la série entière $\sum k a_k r'^{k-1}$, qui converge uniformément dans les compacts de l'intervalle $] -R, R[$. On voit qu'elle est intégrable, et que sa primitive qui vaut a_0 en 0 est précisément S , la somme de la série entière $\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$. \square

COROLLAIRE 3.6. Soit $\sum_k a_k z^k$ une série entière, de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme est C^∞ dans $] -R, R[$, et sa dérivée k -ième est obtenue en dérivant terme à terme.

DÉMONSTRATION. On peut appliquer le théorème 3.5 récursivement, on obtient que la série est dérivable à tous les ordres, et que pour chaque ordre sa dérivée est la somme de série entière obtenue en dérivant k fois chaque terme, le rayon de convergence de cette série dérivée k fois étant encore R . \square

En fait, un résultat plus fort s'applique, que nous ne verrons pas ici mais que vous rencontrerez probablement plus tard : les séries entières sont en fait dérivables au sens *complexe* dans leur disque ouvert de convergence, et même *analytiques réelles*, ce qui est une notion de régularité plus forte que la régularité C^∞ .

3.3. Somme et produit de séries entières. On dispose pour les séries entières d'opérations utiles de sommes et de produit.

THÉORÈME 3.7. Soient $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k b_k z^k$ deux séries entières, de rayons de convergence respectivement R et R' et de sommes S et S' . Alors la série entière $\sum_k (a_k + b_k) z^k$ a pour rayon de convergence R'' , avec $R'' \geq \min(R, R')$. De plus, si $R \neq R'$, alors $R'' = \min(R, R')$. Dans l'intersection des disques ouverts de rayons R et R' , la somme de cette série est $S'' = S + S'$.

DÉMONSTRATION. Soit $r < \min(R, R')$, alors $a_k r^k \rightarrow 0$ et $b_k r^k \rightarrow 0$, et donc $(a_k + b_k) r^k \rightarrow 0$. Ceci montre que $R'' \geq \min(R, R')$.

Supposons maintenant que $R \neq R'$, par exemple que $R < R'$. Soit $r \in]R, R'[$. Alors $(a_k r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors que $b_k r^k \rightarrow 0$. Donc $((a_k + b_k) r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, et donc $R'' = R = \min(R, R')$.

Lorsque les deux séries $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k b_k z^k$ convergent, alors la somme de la série entière $\sum_k (a_k + b_k) z^k$ est la somme des deux sommes. \square

Exemple. Si $a'_k = -a_k$ pour tout k , alors $R = R'$ mais on a $R'' = \infty$ même si R et $R' < \infty$.

DÉFINITION 3.8. Soient $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k b_k z^k$ deux séries entières. On appelle série produit la série entière $\sum_k c_k z^k$, avec

$$\forall k \in \mathbb{N}, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j .$$

THÉORÈME 3.9. Soient $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k b_k z^k$ deux séries entières, de rayons de convergence respectivement R et R' et de sommes S et S' . Alors la série produit $\sum_k c_k z^k$ a pour rayon de convergence R'' , avec $R'' \geq \min(R, R')$, et, dans le disque ouvert de rayon $\min(R, R')$, sa somme est le produit SS' .

On verra la preuve dans les exercices.

3.4. Fonctions développables en séries entières. On peut aussi voir les séries entières d'un autre point de vue : celui des fonctions qu'on obtient comme sommes. La plupart des fonctions usuelles sont de ce type, on va en voir quelques exemples ci-dessous.

DÉFINITION 3.10. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, où U est un sous-ensemble de \mathbb{R} ou de \mathbb{C} , est développable en série entière (en 0) s'il existe une série entière $\sum_k a_k z^k$ de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme est égale, dans le disque ouvert de convergence, à f .

THÉORÈME 3.11. Supposons f développable en série entière, de développement $\sum_k a_k t^k$. Alors f est C^∞ au voisinage de 0, et ses dérivées successives sont données par : $f^{(n)}(0) = n! a_n$.

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence du corollaire 3.6. \square

On peut en donner quelques exemples, on en verra d'autres en exercice. Les développements permettent de donner directement des extensions à \mathbb{C} de certaines fonctions usuelles définies d'abord sur \mathbb{R} . Dans tous les cas, les coefficients de la série peuvent être obtenus par le théorème 3.11, et le rayon de convergence calculé directement (on va le voir en exercice).

- (1) La fonction exponentielle est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini. Son développement est

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} .$$

Pour le voir, on appelle S la somme de cette série entière, et on vérifie en utilisant le théorème de dérivation 3.5 que $S' = S$ et que $S(0) = 1$, ce qui est une des définitions possibles de la fonction exp.

- (2) Les fonctions cosh et sinh sont les parties paire et impaire, respectivement, de la fonction exponentielle. Leurs développements en série entière sont :

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} , \quad \sinh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

- (3) Les développements des fonctions cos et sin sont obtenues en utilisant les formules :

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} , \quad \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} .$$

Ce sont donc :

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- (4) La fonction $t \mapsto 1/(1-t)$ est développable en série entière de rayon de convergence 1, son développement est :

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k.$$

4. Exercices

Convergence simple et convergence uniforme.

4.1. Dire si les suites de fonctions suivantes convergent simplement et/ou uniformément, et si elles convergent, quelle est leur limite.

- (1) $u_n(t) = \sin(nt)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- (2) $u_n(t) = \sin(t/n)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$.
- (3) $u_n(t) = \sin(t/n)$, $t \in [0, \pi]$, $n \geq 1$.
- (4) $\arctan(nt)$, $t \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

4.2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles, qui converge simplement vers une limite u .

- (1) Montrer que $(\sin(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite qu'on précisera.
- (2) On suppose maintenant que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers u . Montrer que $(\sin(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément et préciser sa limite.
- (3) Que peut-on dire de la suite de fonctions $(u_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$?

4.3. * Soit (u_n) une suite de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui converge vers une limite u , et soit v une fonction continue sur \mathbb{R} .

- (1) Montrer que $(v \circ u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $v \circ u$.
- (2) On suppose maintenant que (u_n) converge uniformément vers u , et que v est lipschitzienne. Montrer que la suite de fonctions $(v \circ u_n)$ converge uniformément vers $v \circ u$.
- (3) La condition que v est lipschitzienne est-elle nécessaire ?

4.4. On considère la fonction $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

- $\phi(x) = \sin(x)$ si $x \in [0, \pi]$,
- $\phi(x) = 0$ sinon.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une fonction f_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f_n(x) = n\phi(nx)$.

- (1) Montrer que (f_n) converge simplement vers une limite qu'on précisera f .
- (2) La convergence est-elle uniforme ?
- (3) Déterminer la limite quand $n \rightarrow \infty$ de $\int_{[0, \pi]} f_n(t) dt$, et la comparer avec l'intégrale de f entre 0 et π .

4.5. * Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles est vraie ou fausse. Si elle est vraie, en donner une démonstration. Si elle est fausse, donner un contre-exemple.

- (1) Si (u_n) est une suite de fonctions continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui converge simplement vers une limite u , alors u est continue.
- (2) Si (u_n) est une suite de fonctions C^1 qui converge uniformément vers une limite u , alors u est C^1 .
- (3) Si (u_n) est une suite de fonctions continues sur $[0, 1]$ qui converge simplement vers une limite u , alors $\int_0^1 u_n(t)dt \rightarrow \int_0^1 u(t)dt$.
- (4) Si (u_n) est une suite de fonctions continues qui converge uniformément sur \mathbb{R} vers une limite u , alors $\int_{-\infty}^{\infty} u_n(t)dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} u(t)dt$.

Suites et séries de fonctions.

4.6. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies pour $x \geq 0$ par $f_n(x) = (1 - x/n)^n$ pour $x \in [0, n]$, par $f_n(x) = 0$ pour $x \geq n$.

4.7. Etudier la convergence (simple, uniforme, normale) de la série de fonctions $\sum_k x^k$ sur $[-1, 1]$, puis sur $[-a, a]$ pour $a \in]0, 1[$.

4.8. On définit $u_n(x) = x/(n^2 + x^2)$ pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

- (1) Montrer que la série $\sum_{k \geq 1} u_k$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
- (2) Montrer que cette série converge uniformément sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$.
- (3) Converge-t-elle uniformément sur \mathbb{R}_+ ?
- (4) Montrer que cette série converge normalement sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$.
- (5) Converge-t-elle normalement sur \mathbb{R}_+ ?

4.9. * On considère une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers 0 sur \mathbb{R} , et on suppose de plus que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n(x))$ est décroissante. Montrer que la série de fonctions $\sum_n (-1)^n u_n$ converge uniformément, et que sa somme est au plus égale à u_0 .

Séries entières.

4.10. Montrer que les séries entières $\sum_k a_k z^k$ et $\sum_k (-1)^k a_k z^k$ ont même rayon de convergence.

4.11. Dans les différents cas ci-dessous, déterminer le rayon de convergence la série entière $\sum_k a_k z^k$.

- (1) $a_k = (-1)^k / \log(k + 1)$.
- (2) $a_k = e^k$.
- (3) $a_k = (-1)^k / k!$.
- (4) $a_k = \log(k) / k^2$.

4.12. * Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k+1}/a_k = \lambda \neq 0$. Déterminer son rayon de convergence en fonction de λ .

4.13. Justifier les développements en série entière suivants, et donner leurs rayons de convergence. Pour chaque exemple on commencera par écrire explicitement les premiers termes de la série.

(1) Exponentielle :

$$\exp(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} .$$

(2) Cosinus hyperbolique :

$$\cosh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} .$$

(3) Sinus hyperbolique :

$$\sinh(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} .$$

(4) Cosinus :

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} .$$

(5) Sinus :

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} ;$$

(6) $1/(1-t)$:

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k .$$

(7) $1/(1-t^2)$:

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} t^{2k} .$$

(8) $1/(1+t)$:

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^k .$$

(9) $1/(1+t^2)$:

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} .$$

(10) $1/\sqrt{1-t^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} t^{2k} .$$

(11) $1/\sqrt{1+t^2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} t^{2k} .$$

(12) $\log(1 - t)$:

$$\log(1 - t) = - \sum_1^{\infty} \frac{t^k}{k} .$$

(13) $\log(1 + t)$:

$$\log(1 + t) = \sum_1^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} .$$

(14) $\operatorname{argtanh}$:

$$\operatorname{argtanh}(t) = \sum_0^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{2k+1} .$$

(15) \arctan :

$$\arctan(t) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1} .$$

(16) \arcsin :

$$\arcsin(t) = \sum_0^{\infty} \frac{(2k)! t^{2k+1}}{(2k+1) 2^{2k} (k!)^2} .$$

(17) \arccos :

$$\arccos(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_0^{\infty} \frac{(2k)! t^{2k+1}}{(2k+1) 2^{2k} (k!)^2} .$$

4.14. * Soient $\sum a_k z^k$ et $\sum b_k z^k$ deux séries entières, de rayon de convergence respectivement R et R' , avec $R, R' > 0$. Soit $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des coefficients de la série produit, et R'' le rayon de convergence de cette série entière.

- (1) Montrer que si $r < \min(R, R')$, alors la suite $(c_k r^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
- (2) En déduire que $R'' \geq \min(R, R')$.
- (3) Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.
- (4) On note (S_k) et (S'_k) les sommes partielles de $\sum a_k z^k$ et $\sum b_k z^k$, et (S''_k) les sommes partielles de $\sum c_k z^k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $S_n S'_n - S''_n$ comme une somme de termes faisant intervenir seulement des puissances de z au moins égales à $n+1$. (On pourra traiter d'abord les cas $n = 0, 1, 2, 3$ puis tenter de généraliser au cas général.)
- (5) Montrer que pour $|z| < \min(R, R')$ on a bien $S''(z) = S(z)S'(z)$.

CHAPITRE 3

Espaces de Hilbert

Motivations

Les espaces de Hilbert sont une notion centrale en mathématiques, ils interviennent dans de très nombreux domaines non seulement des mathématiques mais aussi de la physique et de l'ingénierie. On peut citer par exemple :

- Les équations aux dérivées partielles, pour lesquelles il est toujours essentiel de bien choisir et de bien comprendre les espaces fonctionnels dans lesquels on cherche des solutions. Beaucoup de ces espaces fonctionnels sont des espaces de Hilbert. Ce domaine inclut la recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui sont essentielles en ingénierie, et l'étude d'équations aux dérivées partielles qui décrivent la plupart des phénomènes physiques.
- L'analyse de Fourier (comme on va le voir dans les deux chapitres suivants).
- La mécanique quantique, où les particules physiques “vivent” dans un espace de Hilbert.
- L'analyse du signal, où les espaces de Hilbert apparaissent aussi de manière prépondérante.

L'importance de la notion d'espace de Hilbert vient du fait que leur définition est simple et permet d'utiliser des outils puissants, qui s'appliquent dans de très vastes domaines.

Un peu d'histoire

Les espace de Hilbert sont nommés d'après David Hilbert (1862–1943), l'un des grands mathématiciens de son époque, dont les contributions sont nombreuses et vont de l'algèbre à la relativité générale en passant par beaucoup de branches des mathématiques. Hilbert et d'autres mathématiciens ont travaillé à leur étude dans les premières décennies du XXIème siècle. C'est beaucoup plus tard que John von Neumann (1903–1957), un autre grand mathématicien, leur a donné leur nom, et a créé ce concept unifié qui apparaît dans des domaines très variés.

Objectifs du chapitre

1. Produits scalaires

On va rappeler ici deux notions de produit scalaire : le produit scalaire réel, et le produit scalaire complexe (dit hermitien) qui peut être considéré comme une généralisation.

1.1. Produit scalaire réel.

DÉFINITION 1.1. *Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Un produit scalaire sur E est une application bilinéaire symétrique $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, si $x \neq 0$, alors $b(x, x) > 0$.*

Sauf mention explicite du contraire, on notera le produit scalaire sous la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

PROPOSITION 1.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, on a pour tout $x, y \in E$:*

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle ,$$

avec égalité exactement quand x et y sont colinéaires.

DÉMONSTRATION. □

DÉFINITION 1.3. *La norme associée à un produit scalaire sur un espace vectoriel E est l'application*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : E &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} . \end{aligned}$$

On définit la distance associée à cette norme comme la fonction

$$\begin{aligned} d : E \times E &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\mapsto \|y - x\| . \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, on rappelle les notions de distance et d'espace métrique.

DÉFINITION 1.4. *Une distance sur un ensemble E est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in E$:*

- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

DÉFINITION 1.5. *Un espace métrique est un couple (E, d) , où E est un ensemble et d est une distance sur E .*

On peut maintenant revenir aux produits scalaires.

PROPOSITION 1.6. *La distance associée à (la norme associée à) un produit scalaire est une distance sur E .*

DÉMONSTRATION. Pour montrer que d est une distance il faut montrer que :

- d est symétrique : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout $x, y \in E$,
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$,
- d satisfait l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire que pour tout $x, y, z \in E$ on a $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Les deux premiers points suivent directement des définitions. Pour le troisième point, il faut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On remarque d'abord qu'il suffit de montrer que pour tout $u, v \in E$, on a

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| ,$$

puisqu'on peut tirer le résultat cherché en posant $u = y - x, v = z - y$.

Mais on sait d'après Cauchy-Schwarz qu'on a

$$\langle u, v \rangle \leq \|u\| \|v\|$$

si bien que

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\| \|v\| + \|v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2 ,$$

d'où le résultat. □

1.2. Produit scalaire hermitien. On considère maintenant un espace vectoriel E sur \mathbb{C} .

On rappelle qu'une application $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ est dite \mathbb{R} -linéaire si elle est linéaire depuis E , vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, à valeurs dans \mathbb{C} , vu comme espace vectoriel de dimension 2 sur \mathbb{R} .

DÉFINITION 1.7. Soit $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{R} -linéaire. On dit qu'elle est antilinéaire (sur \mathbb{C}) si

$$\forall x \in E, \forall a \in \mathbb{C}, u(ax) = \bar{a}u(x) .$$

DÉFINITION 1.8. Soit $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{R} -bilinéaire. On dit que b est sesquilinéaire si elle est linéaire par rapport à la première variable, et antilinéaire par rapport à la seconde variable.

On peut bien sûr définir de même les notions d'antilinéarité et de sesquilinearité pour les applications d'un espace vectoriel complexe vers un autre.

DÉFINITION 1.9. Soit $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ une application \mathbb{R} -bilinéaire. On dit que b est hermitienne si elle est sesquilinéaire et de plus

$$\forall x, y \in E, b(y, x) = \overline{b(x, y)} .$$

C'est une notion analogue, dans le cas complexe, à la notion de forme bilinéaire symétrique dans le cas réel.

REMARQUE 1.10. Si $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est hermitienne, alors, pour tout $x \in E$, on a $b(x, x) \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 1.11. Un produit scalaire hermitien sur E est une application hermitienne définie positive, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$ non nul, $b(x, x) > 0$.

On considèrera dans la suite un produit scalaire hermitien noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On notera aussi $\|x\|$ le nombre réel positif ou nul tel que

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle .$$

PROPOSITION 1.12 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). Pour tout $x, y \in E$, on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| ,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

DÉMONSTRATION. On fixe $x, y \in E$, on peut supposer $y \neq 0$, sans quoi le résultat est clair.

On considère le polynôme du second degré en $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = \|x + zy\|^2 = \langle x + zy, x + zy \rangle$$

qui s'écrit aussi

$$P(z) = \|x\|^2 + (\bar{z}\langle x, y \rangle + z\langle y, x \rangle) + |z|^2 \|y\|^2$$

et donc encore

$$P(z) = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{z}\langle x, y \rangle) + |z|^2 \|y\|^2 .$$

Mais ce polynôme ne prend que des valeurs positives ou nulles, et on peut prendre

$$z = -\frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} ,$$

on obtient que

$$\|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} \geq 0 ,$$

d'où le résultat.

En cas d'égalité on voit qu'on a $P(z) = 0$, soit $x + zy = 0$, et donc x et y sont colinéaires. \square

DÉFINITION 1.13. *La distance associée à un produit scalaire hermitien sur E est définie par*

$$d(x, y) = \|y - x\| .$$

PROPOSITION 1.14. *Si \langle, \rangle est un produit scalaire hermitien sur E , alors d est une distance sur E .*

La preuve procède comme dans le cas euclidien, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que l'inégalité triangulaire est satisfaite.

2. Espaces métriques complets

Pour donner la définition d'un espace de Hilbert, on doit d'abord rappeler des notions de topologie. On se place ici dans un espace métrique (F, d) , c'est-à-dire que d est une distance sur l'ensemble F .

DÉFINITION 2.1. *Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de F est une suite de Cauchy si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, d(x_p, x_q) \leq \epsilon .$$

On note que toute suite convergente est une suite de Cauchy. En effet si (x_n) converge vers une limite x , alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $d(x_n, x) \leq \epsilon/2$. On en déduit que pour $p, q \geq N$ on a aussi

$$d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) \leq 2\epsilon/2 = \epsilon ,$$

donc la suite est de Cauchy.

Par contre la réciproque peut être fautive dans certains espaces. Considérons par exemple $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, muni de sa distance usuelle, et la suite définie par $x_n = 1/n, n \geq 1$. C'est clairement une suite de Cauchy, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (Elle converge par contre dans \mathbb{R} , mais c'est autre chose.)

DÉFINITION 2.2. *L'espace métrique (F, d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente.*

EXEMPLE 2.3. \mathbb{R} , muni de sa distance euclidienne usuelle, est complet. On ne va pas le démontrer ici, c'est une propriété fondamentale de \mathbb{R} , qui découle de la propriété de la borne inférieure (tout ensemble minoré de \mathbb{R} admet une borne inférieure).

EXEMPLE 2.4. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, muni de la distance euclidienne usuelle, n'est pas complet.

En effet on a vu plus haut que $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ contient une suite de Cauchy non convergente.

3. Espaces de Hilbert

3.1. Définition et sous-espaces. On peut maintenant donner la définition d'un espace de Hilbert.

DÉFINITION 3.1. *Un espace de Hilbert sur \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire réel (resp. hermitien) tel que la métrique associée est complète.*

En général on va considérer des espaces de Hilbert de dimension infinie, même si la définition donnée ici autorise la dimension finie. Certaines définitions se limitent en fait à des espaces de dimension infinie.

On rappelle la définition d'un sous-ensemble fermé d'un espace métrique.

DÉFINITION 3.2. *Soit (E, d) un espace métrique. Un sous-ensemble $F \subset E$ est fermé si toute suite convergente d'éléments de F a sa limite dans F .*

PROPOSITION 3.3. Soit (E, \langle, \rangle) un espace de Hilbert. Tout sous-espace fermé de E , muni de la restriction du produit scalaire, est un espace de Hilbert.

DÉMONSTRATION. On vérifie directement en se ramenant aux définitions que la restriction du produit scalaire est encore un produit scalaire.

Pour montrer que (F, \langle, \rangle) est complet, on considère une suite de Cauchy (x_n) dans F . Comme c'est une suite de Cauchy dans E et que E est complet, elle converge dans E vers une limite x . Mais comme F est fermé, $x \in F$. Donc F (muni de la restriction du produit scalaire) est complet et donc de Hilbert. \square

3.2. Exemples.

DÉFINITION 3.4. On note l^2 , ou $l^2(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel des suites complexes dont la somme des carrés des modules est convergente,

$$l^2 = \{u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_k |u_k|^2 < \infty\} .$$

On le muni de l'application bilinéaire suivante :

$$(1) \quad \langle u, v \rangle = \sum_k u_k \overline{v_k} .$$

On note d'abord que cette application bilinéaire est bien définie, c'est-à-dire que la série qui la définit est convergente. En effet pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée dans \mathbb{C}^{q-p+1} :

$$\left| \sum_{k=p}^q u_k \overline{v_k} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=p}^q |u_k|^2 \right) \left(\sum_{k=p}^q |v_k|^2 \right) .$$

Comme les séries $\sum |u_k|^2$ et $\sum |v_k|^2$ sont convergentes, il existe pour tout $\epsilon > 0$ un $n \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \geq n$ alors le terme de droite est plus petit que ϵ , et on en déduit que la série de (1) converge.

LEMME 3.5. La forme bilinéaire définie par (1) est un produit scalaire hermitien sur l^2 . La distance associée est complète.

PREUVE PARTIELLE. On vérifie directement que \langle, \rangle est une forme sesquilinéaire sur l^2 . De plus, elle est définie positive, car si $(u_n) \in l^2$ est non nulle, alors

$$\langle (u_n), (u_n) \rangle = \sum_k |u_k|^2 > 0 .$$

On va montrer que (l^2, \langle, \rangle) est complet. Soit $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans l^2 . Ainsi pour tout n on a $u^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$. Considérons $k \in \mathbb{N}$ fixé. Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_k^p - u_k^q|^2 \leq \sum_i |u_i^p - u_i^q|^2 = \|u^p - u^q\|^2 .$$

Comme la suite (u^n) est de Cauchy, on voit en appliquant la définition que la suite $(u_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, et donc qu'elle converge vers une limite u_k . Ainsi, on peut conclure que la suite de fonctions données par $u^n = (u_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers une limite u .

On va admettre ici qu'en fait, la convergence est au sens de la distance de l^2 , c'est à dire qu'on a bien

$$\lim_{\infty} \|u^n - u\| = 0 .$$

\square

DÉFINITION 3.6. On note $L^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions intégrables u de \mathbb{R} dans \mathbb{C} telles que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt$$

est convergente, muni du produit scalaire hermitien

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(t)\bar{v}(t) dt .$$

THÉORÈME 3.7 (admis). $L^2(\mathbb{R})$, muni de ce produit scalaire hermitien, est un espace de Hilbert.

Pour la définition suivante, on rappelle qu'on note $C_0^\infty(\mathbb{R})$ l'espaces des fonctions C^∞ à support compact de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

DÉFINITION 3.8. Soit $f \in L^2$. On dit que f est dérivable au sens faible (ou au sens des distributions) s'il existe une fonction $g \in L^2$ telle que pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int f(t)\phi'(t) dt = - \int g(t)\phi(t) dt .$$

Dans ce cas, on dit que g est la dérivée de f au sens faible (ou au sens des distributions).

Notons que si f est dérivable, on voit par une intégration par parties que $g = f'$ satisfait la définition (on peut intégrer par parties puisque ϕ est supposé à support compact). Mais beaucoup de fonctions qui ne sont pas dérivables au sens "fort" ont une dérivée au sens faible.

DÉFINITION 3.9. On appelle $H^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ qui ont une dérivée au sens faible (dans $L^2(\mathbb{R})$ donc, par définition).

THÉORÈME 3.10. $H^1(\mathbb{R})$, muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f(t)\bar{g}(t) + f'(t)\bar{g}'(t) dt ,$$

est un espace de Hilbert.

$H^1(\mathbb{R})$ est ce qu'on appelle un espace de Sobolev — on peut bien sûr ajouter des dérivations, et définir un espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R})$ avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int f(t)\bar{g}(t) + f'(t)\bar{g}'(t) + f''(t)\bar{g}''(t) dt ,$$

pour des fonctions qui admettent deux dérivées au sens faible. Ces espaces de Sobolev jouent un rôle central dans beaucoup d'applications, par exemple en analyse numérique.

4. Géométrie dans les espaces de Hilbert

On peut faire de la géométrie dans les espaces de Hilbert, comme dans le plan ou dans l'espace euclidien. Bien sûr une partie seulement des propriétés qui sont vraies dans un espace vectoriel de dimension finie s'étendent, mais c'est une partie importante qui joue un rôle essentiel dans les applications.

Dans cette section on considère un espace de Hilbert E , et on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire.

4.1. L'identité de Pythagore. On dit que deux vecteurs $u, v \in E$ sont orthogonaux si $\langle u, v \rangle = 0$, on le notera parfois $u \perp v$.

LEMME 4.1 (Identité de Pythagore). *Pour tout $u, v \in E$ on a*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle u, v \rangle) + \|v\|^2 .$$

En particulier, si $u \perp v$ alors

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 .$$

DÉMONSTRATION. Exercice. □

4.2. L'identité du parallélogramme. On note la relation suivante, qu'on utilisera plus tard.

LEMME 4.2 (Identité du parallélogramme). *Soient $u, v \in E$, alors*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) .$$

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de l'identité de Pythagore. □

On note aussi les identités de polarisation suivantes. Dans un espace de Hilbert réel, on a pour tout $u, v \in E$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) .$$

et dans un espace de Hilbert complexe,

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2) .$$

Une conséquence directe est qu'il suffit de connaître la norme pour connaître le produit scalaire.

4.3. Projection sur un convexe.

DÉFINITION 4.3. *On dit qu'un sous-ensemble $K \subset E$ est convexe si, pour tout $x, y \in K$ et tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1 - t)y \in K$.*

En d'autres termes, chaque fois que K contient deux points, il contient le segment qui les joint.

THÉORÈME 4.4 (Projection sur un convexe). *Soit K un convexe non vide fermé de E . Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in K$ qui minimise la distance à x , parmi tous les éléments de K . On appelle y le projeté orthogonal de x sur K .*

En d'autres termes, il existe un unique $y \in K$ tel que

$$d(x, y) = \inf_{z \in K} d(x, z) .$$

DÉMONSTRATION. Soit

$$d_x = \inf_{z \in K} d(x, z) .$$

Comme $K \neq \emptyset$, $d_x < \infty$. Il existe donc une suite (y_n) de points de K tels que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = d_x$, soit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x\|^2 = d_x^2$. Choisissons $\epsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|y_n - x\|^2 \leq d_x^2 + \epsilon$.

On choisit $p, q \in \mathbb{N}$ et on applique l'identité du parallélogramme avec $u = y_p - x, v = y_q - x$, on voit que $u - v = y_p - y_q$, si bien que

$$\|(y_p - x) + (y_q - x)\|^2 + \|y_p - y_q\|^2 = 2(\|y_p - x\|^2 + \|y_q - x\|^2) ,$$

Supposons que $p, q \geq N$. On sait que $(y_p + y_q)/2 \in K$ par définition de la convexité de K , et donc

$$\begin{aligned} \|y_p - y_q\|^2 &= 2(\|y_p - x\|^2 + \|y_q - x\|^2) - \|(y_p - x) + (y_q - x)\|^2 \\ &= 2(\|y_p - x\|^2 + \|y_q - x\|^2) - 4\|(y_p + y_q)/2 - x\|^2 \\ &\leq 4(d^2 + \epsilon) - 4d^2 \\ &\leq 4\epsilon . \end{aligned}$$

Ainsi la suite (y_n) est de Cauchy, et donc, comme E est complet, elle converge vers une limite y .

Par continuité de la distance on a bien $d(y, x) = d$.

Supposons maintenant que $y, y' \in K$ sont tous deux tels que

$$d(x, y) = d(x, y') = d .$$

Alors on voit encore en appliquant l'identité du parallélogramme à $x - y$ et $x - y'$ que

$$\|y - y'\|^2 = 2(\|x - y\|^2 + \|x - y'\|^2) - 4\|x - (y + y')/2\|^2$$

et donc

$$\|y - y'\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2$$

si bien que $\|y - y'\|^2 = 0$ et donc $y = y'$, ce qui montre l'unicité de la projection orthogonale. \square

REMARQUE 4.5. Supposons que K est un sous-espace vectoriel (fermé) de E . Alors la projection orthogonale y de x sur K est caractérisée par le fait que $y - x \perp K$. En d'autres termes, il existe un unique point z de K tel que $x - z \perp K$ et c'est précisément le projeté orthogonal de x sur K .

PREUVE DANS LE CAS D'UN ESPACE DE HILBERT RÉEL. On remarque que si $z \in K$ et si $u \in K$ alors

$$\left(\frac{d}{dt} \|x - (z + tu)\|^2 \right)_{|t=0} = 2\langle u, x - z \rangle ,$$

qui s'annule pour tout $u \in K$ si et seulement si $x - z$ est orthogonal à K . Donc cette orthogonalité est réalisée lorsque z est le projeté orthogonal de x sur K .

Mais si $y, z \in K$ sont deux points de K tels que $x - y \perp K$ et $x - z \perp K$, alors $y - z \perp K$. Mais $y - z \in K$ et donc $y - z = 0$, donc $y = z$. \square

On laisse en exercice le cas d'un espace de Hilbert complexe.

Cette propriété signifie que, si on se donne un sous-espace vectoriel fermé F de E , tout point $x \in E$ a une "meilleure approximation" dans F , qu'on peut de plus caractériser en termes d'orthogonalité à F . C'est une propriété essentielle pour beaucoup d'applications. (On peut penser par exemple au cas où on souhaite modéliser une fonction par une approximation qui vit dans un sous-espace vectoriel de dimension finie.)

5. Théorème de représentation de Riesz

On se place à nouveau dans une espace de Hilbert E (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

DÉFINITION 5.1. Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}). On note E^* l'ensemble des formes linéaires continues sur E . C'est un espace vectoriel.

On note que, dans un espace de Hilbert, toute forme linéaire n'est pas nécessairement continue!

EXEMPLE 5.2. Soit $u \in E$. L'application de E dans \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) qui à v associe $\langle v, u \rangle$ est une forme linéaire continue sur E .

DÉMONSTRATION. Exercice. (Ne pas oublier de montrer la continuité...) \square

THÉORÈME 5.3 (Théorème de représentation de Riesz). *Pour tout $\alpha \in E^*$, il existe un $u \in E$ tel que*

$$\forall v \in E, \alpha(v) = \langle v, u \rangle .$$

DÉMONSTRATION. On suppose que $\alpha \neq 0$, sans quoi le résultat est obtenu en prenant $u = 0$. Il suit que $F \neq E$.

On note $F = \ker(\alpha)$. On montre d'abord que F est un sous-espace fermé de E , on va lui appliquer le théorème de projection sur un fermé. (...)

On note ensuite que F^\perp est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1, c'est-à-dire une droite vectorielle. En effet, soit $y, z \in F^\perp, y, z \neq 0$. Alors

$$\alpha(y/\alpha(y) - z/\alpha(z)) = 0 ,$$

donc $y/\alpha(y) - z/\alpha(z) \in F$. Mais $y/\alpha(y) - z/\alpha(z) \in F^\perp$ par définition, et donc $y/\alpha(y) - z/\alpha(z) = 0$, donc y et z sont proportionnels.

On choisit maintenant $x \in F^\perp, x \neq 0$, et on pose

$$u = \frac{x\alpha(x)}{\langle x, x \rangle} .$$

On note alors (...) que pour tout $v \in E$ on a

$$\langle v, u \rangle = \alpha(v) ,$$

ce qui est le résultat recherché. \square

6. Compacité faible

NB : cette partie ne sera pas traitée en cours.

On va donner ici sans preuve une autre propriété essentielle des espaces de Hilbert, très utile pour certaines applications : la compacité faible de la boule unité, et plus généralement des sous-ensembles fermés et bornés.

DÉFINITION 6.1. *Si (x_n) est une suite dans un espace métrique (E, d) , une sous-suite de (x_n) est une suite de la forme $(x_{\sigma(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante.*

Cette définition signifie que, dans une sous-suite, on ne prend qu'une partie des termes de la suite, on oublie les autres.

DÉFINITION 6.2. *Dans un espace métrique (E, d) , un sous-ensemble K est dit compact si toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente.*

RAPPEL 6.3. Dans un espace vectoriel de dimension finie, la boule unité est compacte : toute suite de vecteurs de norme au plus 1 admet une sous-suite convergente.

DÉFINITION 6.4. *Soit (x_n) une suite dans un espace de Hilbert E . On dit qu'elle est faiblement convergente de limite $x \in E$ si, pour tout $u \in E$,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, u \rangle = \langle x, u \rangle .$$

On admet ici le théorème suivant.

THÉORÈME 6.5 (Compacité faible de la boule unité d'un Hilbert). *Dans un espace de Hilbert, la boule unité est faiblement compacte.*

COROLLAIRE 6.6. *Dans un espace de Hilbert, toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente.*

7. Bases orthonormées

On va maintenant voir une notion de base orthonormée pour les espaces de Hilbert, analogue à la notion habituelle dans les espaces vectoriels de dimension finie munis de produit scalaires. On se place à nouveau dans un espace de Hilbert E .

DÉFINITION 7.1. Soit B un ensemble quelconque, et soit $(e_i)_{i \in B}$ une famille d'éléments de E . Le sous-espace vectoriel engendré par $(e_i)_{i \in B}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{i \in B} a_i e_i,$$

où $(a_i)_{i \in B}$ est une famille d'éléments de \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) qui n'est non nulle que pour un ensemble fini d'éléments de B (si bien que la somme a bien un sens). On note $\langle (e_i)_{i \in B} \rangle$ ce sous-ensemble de E .

On peut montrer facilement que $\langle (e_i)_{i \in B} \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E . C'est par définition l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini des e_i .

DÉFINITION 7.2. Soit $F \subset E$, on dit que F est dense dans E si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de F .

DÉFINITION 7.3. Une base orthonormée de E est une famille $(e_i)_{i \in B}$ d'éléments de E telle que :

- (1) les e_i sont de norme 1,
- (2) ils sont deux à deux orthogonaux,
- (3) $\langle (e_i)_{i \in B} \rangle$ est dense dans E .

La définition implique que tout élément de E est limite d'une suite d'éléments qui sont combinaison linéaire d'un nombre fini de e_i .

THÉORÈME 7.4 (Inégalité de Parseval). Soit E un espace de Hilbert, et soit (e_i) une base orthonormée de E . Pour tout $x \in E$ et tout sous-ensemble fini $B' \subset B$ on a

$$\sum_{i \in B'} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in E$. Par définition d'une base orthonormée, il existe une suite (x_n) d'éléments de $\langle (e_i)_{i \in B} \rangle$ qui converge vers x . On peut écrire pour chaque $n \in \mathbb{N}$:

$$x_n = \sum_{i \in B} x_n^i e_i,$$

où la famille des $(x_n^i)_{i \in B}$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

On a pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B'} |\langle x_n, e_i \rangle|^2 &= \sum_{i \in B'} |x_n^i|^2 \\ &\leq \sum_{i \in B} |x_n^i|^2 \\ &\leq \|x_n\|^2 \end{aligned}$$

(On note que toutes les sommes sont finies dans ces équations, car seuls un nombre fini des x_n^i sont non nuls.)

Mais on a aussi pour tout $i \in B$

$$|\langle x, e_i \rangle - \langle x_n, e_i \rangle| = |\langle x - x_n, e_i \rangle| \leq \|x - x_n\| \|e_i\| \leq \|x - x_n\| ,$$

et donc

$$|\langle x, e_i \rangle|^2 - |\langle x_n, e_i \rangle|^2 = |\langle x, e_i \rangle - \langle x_n, e_i \rangle| |\langle x, e_i \rangle + \langle x_n, e_i \rangle| \leq \|x - x_n\| (\|x\| + \|x_n\|) .$$

En sommant sur les éléments de B' on obtient que

$$\sum_{i \in B'} |\langle x, e_i \rangle|^2 - \sum_{i \in B'} |\langle x_n, e_i \rangle|^2 \leq \#(B') \|x - x_n\| (\|x\| + \|x_n\|) .$$

Choisissons maintenant $\epsilon > 0$, et un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|x_n - x\| \leq \epsilon$. On a alors $\|x_n\| \leq \|x\| + \epsilon$, et donc

$$\begin{aligned} \sum_{i \in B'} |\langle x, e_i \rangle|^2 &\leq \sum_{i \in B'} |\langle x_n, e_i \rangle|^2 + \#(B') \|x - x_n\| (\|x\| + \|x_n\|) \\ &\leq \|x_n\|^2 + \#(B') \|x - x_n\| (\|x\| + \|x_n\|) \\ &\leq (\|x\| + \epsilon)^2 + \#(B') \epsilon (2\|x\| + \epsilon) \end{aligned}$$

Comme cette inégalité est valable pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit le résultat. \square

On peut distinguer parmi les espace de Hilbert ceux qui ont une base dénombrable, c'est-à-dire dont les indices sont dans \mathbb{N} . La plupart des espaces de Hilbert qu'on rencontre dans la vie quotidienne sont soit de dimension finie, soit de ce type.

DÉFINITION 7.5. *Un espace de Hilbert est séparable s'il admet une base orthonormée dénombrable, c'est-à-dire indicée par les éléments de \mathbb{N} .*

Pour les espaces de Hilbert séparables, on peut considérer la somme des $|\langle x, e_i \rangle|^2$ sur tout \mathbb{N} , et cette somme est toujours convergente.

THÉORÈME 7.6 (Identité de Parseval). *Soit E un espace de Hilbert séparable, muni d'une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$. On a pour tout $x \in E$:*

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \|x\|^2 .$$

DÉMONSTRATION. Laissée en exercice. \square

Il suit de ce théorème que les espaces de Hilbert séparables sont en fait tous les mêmes, en un sens assez fort.

COROLLAIRE 7.7. *Soit E un espace de Hilbert séparable. Il existe une application $\phi : E \rightarrow l^2$ qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels et qui préserve le produit scalaire :*

$$\forall u, v \in E, \langle u, v \rangle = \langle \phi(u), \phi(v) \rangle .$$

DÉMONSTRATION. On se donne une base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et on considère simplement l'application linéaire de $\phi : E \rightarrow l^2$ qui envoie $x \in E$ sur $(\langle x, e_i \rangle)_{i \in \mathbb{N}} \in l^2$. On vérifie directement que c'est une application linéaire, et elle est injective d'après l'identité de Parseval.

Pour montrer que ϕ est surjective, on prend $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^2$, on va montrer que $u \in \text{Im}(\phi)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n = \sum_{k=0}^n u_k e_k .$$

On remarque que pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ avec $p \leq q$, on a

$$\|x_q - x_p\|^2 = \left\| \sum_{k=p+1}^q u_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=p+1}^q |u_k|^2.$$

Comme $u \in l^2$, la série $\sum |u_k|^2$ converge, et donc la suite (x_n) est de Cauchy. On note x sa limite, qui existe car E est un espace de Hilbert. On vérifie alors que $\phi(x) = u$.

D'après l'identité de polarisation, pour montrer que ϕ préserve le produit scalaire, il suffit de montrer qu'elle préserve la norme. Or c'est une conséquence directe de l'identité de Parseval, et de la définition de la norme de l^2 . \square

L'identité de Parseval est aussi liée à la reconstruction d'un vecteur d'un espace de Hilbert par ses produits scalaires avec les éléments d'une base orthonormée. La preuve du résultat suivant est laissée en exercice (elle n'est pas très difficile), c'est un énoncé simple mais important, qui nous sera particulièrement utile dans les chapitre suivant sur les séries de Fourier.

THÉORÈME 7.8. *Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée d'un espace de Hilbert séparable E . Pour tout $x \in E$, la série*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n$$

est convergente (au sens de la distance associée au produit scalaire) et sa somme est x .

Notons en particulier que la convergence de la série provient de l'identité de Parseval.

8. Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est une manière d'obtenir une base orthonormée à partir de n'importe quelle famille dénombrable d'éléments de E qui "engendre" E .

On rappelle d'abord deux définitions importantes.

DÉFINITION 8.1. *On dit que $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est linéairement indépendante si chaque fois qu'on a une famille $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbb{R} (resp. \mathbb{C}) dont seulement une partie finie est non nulle, telle que*

$$\sum_i a_i f_i = 0$$

alors on a en fait $a_i = 0$ pour tout i .

DÉFINITION 8.2. *On dit que $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ engendre E si $\langle (f_i)_{i \in \mathbb{N}} \rangle$ est dense dans E .*

THÉORÈME 8.3 (Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt). *Soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille linéairement indépendante qui engendre E . Il existe une unique base orthonormée $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de E telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

- $\langle (e_i)_{i \leq n} \rangle = \langle (f_i)_{i \leq n} \rangle$,
- $\langle e_i, f_i \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$.

DESCRIPTION RAPIDE DE LA PREUVE. On va construire récursivement la famille (e_i) .

On note d'abord qu'on a nécessairement

$$e_0 = f_0 / \|f_0\|,$$

puisque d'une part e_0 doit être colinéaire à f_0 et d'autre part on doit avoir $\langle e_0, f_0 \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$, et $\langle e_0, e_0 \rangle = 1$.

On suppose maintenant la suite (e_i) construite jusqu'à $i = n - 1$, on va choisir e_n . On sait que $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension $n + 1$, alors que $\langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$

est de dimension n . Donc e_n doit être dans l'orthogonal de $\langle e_0, \dots, e_{n-1} \rangle$ dans $\langle f_0, \dots, f_n \rangle$, qui est un espace vectoriel de dimension 1. Si on choisit un vecteur non nul u dans cet espace, e_n doit être de la forme λu , et λ est uniquement déterminé par les conditions que $\|e_n\| = |\lambda|\|u\| = 1$ (qui détermine son module) et que $\langle x_n, f_n \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$ (qui détermine son argument).

En appliquant cette procédure récursivement, on trouve une unique suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui satisfait les hypothèses du théorème. \square

9. Exercices

Produits scalaires hermitiens.

9.1. On se place dans \mathbb{C}^2 muni de ses coordonnées z_1, z_2 usuelles. On considère les applications suivantes. Dire lesquelles sont sesquilineaires et lesquelles définissent un produit scalaire hermitien. On note ici $z = (z_1, z_2)$, $z' = (z'_1, z'_2)$.

- (1) $b(z, z') = z_1 z_2 + z'_1 z'_2$.
- (2) $b(z, z') = z_1 z'_1 + z_2 z'_2$.
- (3) $b(z, z') = z_1 \overline{z'_1} + z_2 \overline{z'_2}$.
- (4) $b(z, z') = z_1 z'_2 + z_2 z'_1$.
- (5) $b(z, z') = z_1 \overline{z'_2} + z_2 \overline{z'_1}$.

Espaces métriques complets.

9.2. Les fonctions suivantes définissent-elles des distances sur \mathbb{R}^2 ?

- (1) $d((x, y), (x', y')) = |x' - x| + |y' - y|$.
- (2) $d((x, y), (x', y')) = \max(|x' - x|, |y' - y|)$.
- (3) $d((x, y), (x', y')) = \min(|x' - x|, |y' - y|)$.

9.3. Déterminer lesquels, parmi les espaces métriques suivants, lesquels sont complets. Chaque réponse sera soigneusement argumentée.

- (1) $]0, \infty[$, muni de la distance usuelle sur \mathbb{R} .
- (2) $[0, \infty[$, muni de la distance usuelle sur \mathbb{R} .
- (3) \mathbb{R}^3 , muni de la distance euclidienne usuelle.
- (4) $]0, \infty[\times \mathbb{R}$, muni de la distance euclidienne usuelle de \mathbb{R}^2 .
- (5) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, muni de la distance Euclidienne de \mathbb{R}^2 .

9.4. On considère \mathbb{Q} , l'ensemble des nombres rationnels, munis de la distance induite par la distance usuelle de \mathbb{R} , soit $d(r, r') = |r' - r|$. Est-il complet ?

Espaces de Hilbert.

9.5.

- (1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} , muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Montrer que E , muni de la distance associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est complet.
- (2) Même question pour un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien.
- (3) On considère l'espace vectoriel $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions de carré sommable, c'est-à-dire les fonctions $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (non nécessairement continues) telles que

$$\int_{\mathbb{R}} |u(t)|^2 dt < \infty .$$

On admet pour l'instant (cf cours) que la fonction

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\mapsto \int_{\mathbb{R}} u(t)\bar{v}(t)dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire hermitien complet sur $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des fonctions continues de $u \in L^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel mais qu'il n'est pas fermé.

Projection sur les convexes.

9.6. Soit E un espace de Hilbert. On note B la boule de centre 0 et de rayon 1 dans E .

- (1) Montrer que B est un convexe fermé de E .
- (2) Si $x \in E$, déterminer le projeté orthogonal de x sur E .
- (3) Soit (e_n) une base orthonormée de E , et soit $p \in \mathbb{N}$. Soit F_p le sous-espace de E engendré par e_0, \dots, e_p . Montrer que c'est un convexe fermé de E .
- (4) Quel est le projeté orthogonal sur F_p d'un vecteur $x \in E$?

Formes linéaires.

9.7. Soit $u : E \rightarrow \mathbb{C}$ une forme linéaire sur un espace de Hilbert E . Montrer que u est continue si et seulement si son noyau est fermé dans E .

9.8. Soit E un espace de Hilbert sur \mathbb{C} , et soit E^* l'espace des formes linéaires continues sur E . On note $\phi : E \rightarrow E^*$ l'application qui à $u \in E$ associe la forme linéaire $v \mapsto \langle v, u \rangle$. Est-ce que ϕ est \mathbb{R} -linéaire? Est-elle linéaire sur \mathbb{C} , ou bien semilinéaire? Est-elle injective? Surjective?

Bases orthonormées.

9.9. Donner une base orthonormée de l^2 .

9.10. Base de Haar. On note $L^2([0, 1])$ l'ensemble des fonctions de L^2 qui sont nulles en dehors de l'intervalle $[0, 1]$.

- (1) Montrer que $L^2([0, 1])$, muni de la restriction du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$, est un espace de Hilbert.
- (2) On appelle f_0 la fonction qui vaut 1 sur $[0, 1]$ et 0 ailleurs, et une famille de fonctions $f_{n,k}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq 2^n$, comme suit.
 - $f_{n,k} = -2^{n/2}$ sur $[(k-1)/2^n, (k-1/2)/2^n]$,
 - $f_{n,k} = 2^{n/2}$ sur $](k-1/2)/2^n, k/2^n]$,
 - $f_{n,k} = 0$ ailleurs.
 Tracer un graphe de $f_{0,1}, f_{1,1}, f_{1,2}, f_{2,1}$.
- (3) Montrer que cette famille forme une base orthonormée de $L^2([0, 1])$.

Polynôme orthogonal.

9.11. On se place sur l'intervalle $[-1, 1]$, et on note $E = L^2([-1, 1])$ muni de la restriction du produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n .$$

- (1) Montrer que P_n est orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n - 1$.
- (2) Montrer qu'il existe des constantes $c_n, n \in \mathbb{N}$ tel que la base orthonormée obtenue en appliquant le procédé de Gram-Schmidt au système $(1, x, x^2, \dots)$ est $(c_n P_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On pourra si nécessaire admettre que

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx = 2^{2n} (n!)^2 \frac{2}{2n+1} .$$

CHAPITRE 4

Séries de Fourier

Motivations

Les séries de Fourier sont un outil essentiel tant pour les mathématiques que pour leurs applications en physique et en ingénierie. Elles jouent un rôle central chaque fois qu'on veut étudier un système périodique mais aussi comme outil mathématique pour étudier les fonctions et les équations différentielles ou les équations aux dérivées partielles.

Parmi les applications on peut citer par exemple :

- l'étude des oscillateurs ou des circuits électriques,
- l'équation de la chaleur,
- la forme des fonctions d'onde en mécanique quantique,
- l'analyse du signal (en ingénierie).

Les séries de Fourier sont aussi centrales en mathématiques, elles constituent le coeur de ce qu'on appelle l'analyse harmonique, qui les généralise très largement à des situations beaucoup plus riches.

On verra dans le chapitre suivant la notion de transformée de Fourier, qui s'applique à des fonctions qui ne sont pas périodiques.

Un peu d'histoire

L'étude des polynômes trigonométriques — qui sont sous-jacents aux séries de Fourier — est plus ancienne. Mais on peut associer les débuts des séries de Fourier proprement dites d'une part aux travaux de d'Alembert, Euler et Daniel Bernoulli sur les cordes vibrantes, vers 1750, et d'autre part aux travaux de Joseph Fourier sur l'équation de la chaleur, publiés d'abord en 1807.

L'étude de la convergence et de la régularité des séries de Fourier a été une direction de recherche importante et féconde pour les mathématiques au cours du XIX^{ème} siècle. On peut mentionner en particulier les travaux de Dirichlet, dans les années 1820.

Objectifs du chapitre

L'objectif du chapitre sera surtout de savoir calculer la série de Fourier d'une fonction périodique, dans le cadre réel et dans le cadre complexe. Mais il sera aussi de savoir utiliser les principaux résultats "généraux" présentés :

- identité de Parseval,
- formule d'inversion des séries de Fourier,
- théorèmes de convergence des séries de Fourier.

1. Fonctions périodiques

Les séries de Fourier permettent de donner une décomposition simple des fonctions périodiques. Pour les fonctions qui ne sont pas périodiques, il faut utiliser la transformée de Fourier, qui est un peu moins pratique, on la verra dans le chapitre suivant.

DÉFINITION 1.1. Une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est périodique de période $T > 0$, ou T -périodique, si

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x) .$$

Il est facile de voir que si f est T -périodique alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$, $f(x + kT) = f(x)$.

REMARQUE 1.2. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt .$$

DÉMONSTRATION. A voir en exercice. □

DÉFINITION 1.3. On note $L_T^2(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions localement dans L^2 et T -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . On le munit du produit scalaire hermitien suivant :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^{a+T} f(t) \bar{g}(t) dt ,$$

où a est n'importe quel élément de a . (Le résultat ne dépend pas du choix de a d'après la remarque précédente.)

THÉORÈME 1.4. $L_T^2(\mathbb{R})$, muni de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est un espace de Hilbert.

IDÉE RAPIDE DE LA PREUVE. A chaque fonction $f \in L_T^2(\mathbb{R})$, on associe une fonction $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ égale à f sur $[0, T]$ et à 0 ailleurs. On remarque alors que le produit scalaire entre deux fonctions $f, g \in L_T^2(\mathbb{R})$ est égal au produit scalaire usuel de $L^2(\mathbb{R})$ pris sur f, \bar{g} . On en déduit directement que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire hermitien, et avec un peu plus d'efforts la complétude. □

On va s'intéresser dans la suite du chapitre essentiellement aux fonctions périodiques de période 2π , mais cette valeur pourrait facilement être remplacée par n'importe quelle période $T > 0$.

2. Séries de Fourier complexes

On commence par les séries de Fourier complexes, qui sont un peu plus simples.

DÉFINITION 2.1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note e_k la fonction 2π -périodique définie par

$$e_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} .$$

THÉORÈME 2.2. $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$.

SCHÉMA DE LA PREUVE. On vérifie directement que pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$ on a

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int - imt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((n - m)t + i \sin((n - m)t) dt = \delta_{nm} .$$

Il reste à montrer que $\langle (e_n)_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ est dense dans $L_{2\pi}^2(\mathbb{R})$, ce qu'on ne fera pas ici (ça demande des techniques additionnelles). □

DÉFINITION 2.3. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Ses coefficients de Fourier (complexes) sont les nombres $c_n, n \in \mathbb{Z}$ définis par

$$c_n(f) = \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt .$$

REMARQUE 2.4. Certaines définitions diffèrent de celle-ci par le coefficient ! On a choisi une définition qui donne une relative symétrie à la formule de reconstruction ci-dessous.

On peut appliquer le théorème 7.8 du chapitre précédent, qui montre directement le résultat essentiel suivant.

THÉORÈME 2.5. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, et soient c_n ses coefficients de Fourier (complexes). La série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n e_n$$

est convergente au sens de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, et sa somme est f . On l'appelle série de Fourier (complexe) de f .

COROLLAIRE 2.6. On a

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} ,$$

et la série converge au sens $L^2_{2\pi}$.

On va voir plus bas des théorèmes de convergences un peu plus précis pour les fonctions qui sont plus régulières.

On peut remarquer que la parité de la fonction f se lit dans les coefficients de Fourier, et réciproquement. Rappelons que f est dit paire si $f(-t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, impaire si $f(-t) = -f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

REMARQUE 2.7. (1) f est paire si et seulement si ses coefficients de Fourier sont réels, et impaire si et seulement si ses coefficients de Fourier sont imaginaires purs.

(2) f est réelle si et seulement si $c_{-n} = c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et f est imaginaire pure si et seulement si $c_{-n} = -c_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

3. Séries de Fourier réelles

Lorsque f est une fonction réelle, les coefficients c_n peuvent avoir une partie imaginaire – ça dépend de la symétrie de f , et non pas de si elle est complexe ou réelle.

Mais on peut utiliser une variante de la transformée de Fourier, qui évite de faire apparaître des coefficients et des fonctions complexes.

THÉORÈME 3.1. La famille de fonctions suivantes est une base orthonormée de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} .$$

Notons que dans cet énoncé on peut prendre f réelle (et considérer un espace de Hilbert réel) mais on peut aussi considérer de manière générale des fonctions complexes.

DÉMONSTRATION. On se ramène au théorème correspondant pour les séries de Fourier complexes, et on remarque que pour $n \geq 1$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) = \frac{e_n + e_{-n}}{\sqrt{2}} , \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) = \frac{e_n - e_{-n}}{i\sqrt{2}} .$$

On en déduit le résultat par un argument direct de changement de base. \square

DÉFINITION 3.2. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ une fonction (réelle), ses coefficients de Fourier réels sont

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt, \quad n \geq 1.$$

On a alors le théorème de reconstruction suivant.

THÉORÈME 3.3. Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. La série

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

est convergente au sens de $L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, et sa limite est f . On l'appelle la série de Fourier (réelle) de f .

Comme pour le cas complexe, on peut relier les symétries de f aux valeurs de ses coefficients.

REMARQUE 3.4. f est paire si et seulement si $b_n = 0$ pour tout n , et impaire si et seulement si $a_n = 0$ pour tout n .

On peut passer facilement des coefficients complexes aux coefficients réels, pour une fonction à valeurs réelles, mais aussi pour une fonction à valeurs complexes (dans ce cas les a_n, b_n sont complexes). On a les formules de transformation suivantes, pour $n \geq 1$:

$$c_n = \frac{a_n + ib_n}{\sqrt{2}}, \quad c_{-n} = \frac{a_n - ib_n}{\sqrt{2}},$$

$$a_n = \frac{c_n + c_{-n}}{\sqrt{2}}, \quad b_n = \frac{c_n - c_{-n}}{i\sqrt{2}}.$$

Comme dans le cas complexe, on peut relier la norme dans L^2 de la fonction à celle dans l^2 de ses coefficients de Fourier.

THÉORÈME 3.5 (Formule de Parseval, cas réel). Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles, soient a_n, b_n ses coefficients de Fourier. Alors

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + b_n^2.$$

La preuve suit, comme dans le cas complexe, de la formule correspondante pour les coefficients d'un vecteur d'un espace de Hilbert dans une base orthonormée.

4. Convergence des séries de Fourier

On dispose de théorèmes plus précis de convergence des séries de Fourier. On va les admettre ici sans démonstration.

Le premier résultat décrit la convergence en un point de la série de Fourier d'une fonction qui vérifie des hypothèses de régularité locales en ce point.

THÉORÈME 4.1 (Théorème de convergence simple de Dirichlet). Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$, et soit $x \in \mathbb{R}$ un point où f est continue et dérivable à droite et à gauche. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers $f(x)$ en x .

Un autre énoncé, global, s'applique aux fonctions pour lesquelles on dispose d'hypothèses de régularité globales.

THÉORÈME 4.2 (Théorème de convergence uniforme de Dirichlet). Si f est continue et C^1 par morceaux, alors sa série de Fourier converge uniformément vers f .

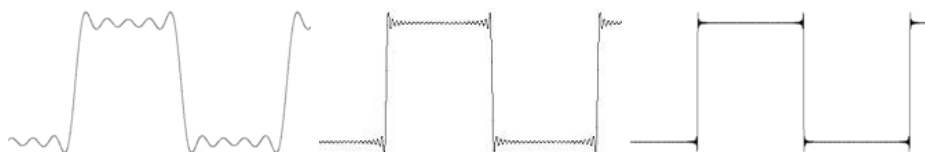


FIGURE 1. Phénomène de Gibbs, avec trois approximations successives d'une fonction non continue (source wikipedia)

Phénomène de Gibbs. Pour les fonctions qui ne sont pas continues, le “phénomène de Gibbs” indique que la convergence ne se produit pas “aussi bien” qu'on aurait pu l'espérer. Non seulement cette convergence n'est pas uniforme — ce n'est pas possible puisque on a vu que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est continue — mais le “saut” à la limite est *plus important* que le saut de la fonction qu'on cherche à reconstruire, de 18% à peu près.

5. Régularité des fonctions et coefficients de Fourier

La régularité d'une fonction est liée à la décroissance des coefficients de sa série de Fourier. La raison en est donnée par la proposition simple suivante.

PROPOSITION 5.1. *Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$ une fonction C^1 , et soient (c_n) ses coefficients de Fourier. Alors les coefficients de Fourier de sa dérivée sont les $c'_n = inc_n$.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de l'intégration par parties appliquée à la définition des coefficients de Fourier. \square

En conséquence, on a la proposition suivante. On note $H^1_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π -périodiques qui sont localement dans l'espace H^1 des fonctions qui sont dans L^2 et admettent une dérivée au sens faible qui est dans L^2 .

PROPOSITION 5.2. *Soit $f \in H^1_{2\pi}$, alors ses coefficients de Fourier sont tels que la suite $(nc_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est de carré sommable.*

DÉMONSTRATION. C'est une conséquence directe de la définition d'une dérivée au sens faible et de la formule d'intégration par parties. \square

En termes de fonctions C^k , on a des relations précises entre dérivabilité et décroissance des séries de Fourier. On admettra le résultat ici (une partie de l'énoncé se démontre aisément par intégration par parties).

THÉORÈME 5.3. *Soit $f \in L^2_{2\pi}(\mathbb{R})$. Soit $k \in \mathbb{N}$.*
 — *Si f est dans C^k , alors $n^k c_n \rightarrow 0$.*
 — *Si $(n^{k+2} c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est bornée, alors f est dans C^k .*

On peut montrer le premier point facilement par récurrence sur k en utilisant des intégrations par parties.

6. Séries de Fourier en plusieurs variables

Pour étudier des équations aux dérivées partielles en plusieurs variables d'espace, on va avoir besoin de compléter un peu le cours sur les séries de Fourier, en introduisant des séries de Fourier à plusieurs variables. On se bornera ici à quelques énoncés simples et utiles. On se limite à deux variables, mais des énoncés analogues sont valables pour trois variables ou plus.

On note ici S^1 l'ensemble des réels considérés modulo $2\pi\mathbb{Z}$, qu'on peut voir (un peu naïvement) comme l'intervalle $[0, 2\pi]$ dans lequel on a identifié 0 et 2π . On note aussi $S^1 \times S^1$ l'ensemble des couples (x, y) , avec x et y deux éléments de S^1 .

DÉFINITION 6.1. Soit $f : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui est dans L^2 . On définit ses coefficients de Fourier comme suit, pour $k, l \in \mathbb{Z}$:

$$c_{k,l} = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1 \times S^1} f(x, y) e^{-i(kx+ly)} dx dy .$$

On a la formule de reconstruction suivante.

THÉORÈME 6.2 (Admis). Supposons que f est C^1 (ou C^1 par morceaux). Alors on a en tout point :

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k,l \in \mathbb{Z}} c_{k,l} e^{i(kx+ly)} .$$

De plus, comme pour les fonctions d'une variable, la régularité des fonctions est liée à la décroissance des coefficients de Fourier. En particulier, on peut définir comme pour les fonctions de une variable les espaces $L^2(S^1 \times S^1)$, $H^1(S^1 \times S^1)$, $H^2(S^1 \times S^1)$, et on a que

- $f \in L^2(S^1 \times S^1)$ si et seulement si $\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |c_{k,l}|^2 < \infty$,
- $f \in H^1(S^1 \times S^1)$ si et seulement si $\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (|k| + |l|)^2 |c_{k,l}|^2 < \infty$,
- $f \in H^2(S^1 \times S^1)$ si et seulement si $\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (k^2 + l^2)^2 |c_{k,l}|^2 < \infty$.

On dispose aussi de liens entre la régularité C^k des fonctions et la décroissance des coefficients de Fourier.

On dispose aussi d'une forme réelle de cette équation, qui peut s'écrire sous la forme de somme de sin et de cos en x et en y . Alternativement, une fonction f est à valeurs réelles si et seulement si on a pour tout $k, l \in \mathbb{Z}$

$$c_{-k, -l} = \overline{c_{k,l}} .$$

La propriété essentielle pour ce qui nous concerne est la manière dont la dérivation agit sur les coefficients de Fourier.

PROPOSITION 6.3. Soit $f : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^2 , soient $c_{k,l}, k, l \in \mathbb{Z}$ ses coefficients de Fourier. Alors les coefficients de Fourier de ses dérivées partielles sont $ikc_{k,l}$ pour $\partial f / \partial x$, et $ilc_{k,l}$ pour $\partial f / \partial y$.

7. Exercices

Fonctions périodiques.

7.1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_b^{b+T} f(t) dt .$$

Séries de Fourier complexes.

7.2. Calculer les coefficients de la série de Fourier complexe de la fonction $f : t \mapsto \cos(5t)$.

7.3. Montrer que si f est une fonction continue 2π -périodique, et si c_n sont ses coefficients de Fourier, alors $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n = 0$.

7.4. Calculer les coefficients de Fourier complexes des fonctions 2π -périodiques définies par les relations suivantes.

- (1) $f(t) = t$ si $t \in [-\pi, \pi[$.
- (2) $g(t) = 1$ si $t \in [0, \pi[$, $g(t) = -1$ si $t \in [-\pi, 0[$.
- (3) $h(t) = |t|$ si $t \in [-\pi, \pi[$.

7.5. Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction $t \mapsto \max(0, \sin(t))$.

Calculs de séries de Fourier et applications.

7.6.

- (1) Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f 2π -périodique telle que $f(t) = t^2$ pour $t \in [0, 2\pi[$.
- (2) En déduire les sommes des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}.$$

7.7.

- (1) Calculer les coefficients de Fourier complexes de la fonction f 2π -périodique telle que $f(t) = e^t$ pour $t \in [-\pi, \pi[$.
- (2) En déduire la somme des séries suivantes :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + 1}.$$

Questions générales.

7.8. Montrer (en utilisant l'égalité de Parseval) que si deux fonctions continues 2π -périodiques ont la même série de Fourier, alors elles sont égales.

7.9. Soit f une fonction 2π -périodique de classe C^1 et de moyenne nulle.

- (1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(t)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0} \frac{|c_n(f')|}{|n|}.$$

(On pourra utiliser la relation entre les coefficients de Fourier de f et de sa dérivée.)

- (2) En déduire que

$$\sup_{\mathbb{R}} |f|^2 \leq \frac{\pi}{6} \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

(On pourra admettre et utiliser le fait que $\sum_{n \geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$.)

Séries de Fourier en plusieurs variables.

7.10. Calculs de séries de Fourier. Ecrire la décomposition en série de Fourier des fonctions suivantes de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans \mathbb{R} et 2π -périodiques en x et en y .

- (1) $f(x, y) = 1$ si $x \in [0, \pi]$ et $y \in [0, \pi]$, $f(x, y) = 0$ si $x \notin [0, \pi]$ ou $y \notin [0, \pi]$.
- (2) $g(x, y) = x + y$ pour $x, y \in [0, 2\pi]$.

7.11. Fonctions décomposable en produit. On considère deux fonctions $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ continues et C^1 par morceaux, et on note $f \otimes g$ la fonction de $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f \otimes g : (x, y) \rightarrow f(x)g(y)$. Exprimer les coefficients de Fourier de $f \otimes g$ en fonction de ceux de f et de g .

Transformée de Fourier

Motivations

Les transformées de Fourier peuvent être considérées comme une continuation naturelle des séries de Fourier. Elles s'appliquent aux fonctions qui ne sont pas périodiques. Comme pour les séries de Fourier, leur domaine d'application est très vaste et recouvre une large part des mathématiques et de la physique, ainsi que certains domaines importants de l'ingénierie.

Objectifs du chapitre

L'objectif principal sera de savoir calculer la transformée de Fourier d'une fonction. Mais il sera important de connaître aussi certains outils utiles :

- la transformée de Fourier inverse,
- la formule de Parseval,
- le produit de convolution et sa relation avec le produit usuel.

Le traitement mathématique rigoureux de la transformée de Fourier est plus délicat que pour les séries de Fourier. La plupart des énoncés, dans ce cours pour ingénieurs et physiciens, seront donc admis sans démonstration. Il faudra par contre comprendre les énoncés et savoir les appliquer dans les exercices.

1. Des séries de Fourier à la transformée de Fourier

On peut considérer la série de Fourier complexe d'une fonction 2π -périodique comme une sorte de "fonction discrète", qui ne prend des valeurs non nulles qu'aux entiers relatifs — et qui prend la valeur c_k en k .

Considérons une fonction f périodique de période non pas 2π mais T . Les coefficients de Fourier sont alors

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{-2\pi kit/T} f(t) dt ,$$

et la formule de reconstruction est

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_k c_k e^{2\pi kit/T} .$$

En d'autres termes, les coefficients de Fourier peuvent être considérés comme une fonction qui prend des valeurs non nulles aux points de la forme $2\pi k/T$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

Si on fait tendre $T \rightarrow \infty$, on obtient une suite de fonctions, associées aux séries de Fourier, qui sont non nulles sur un "peigne" de plus en plus fin. A la limite, on voit émerger la notion de série de Fourier.

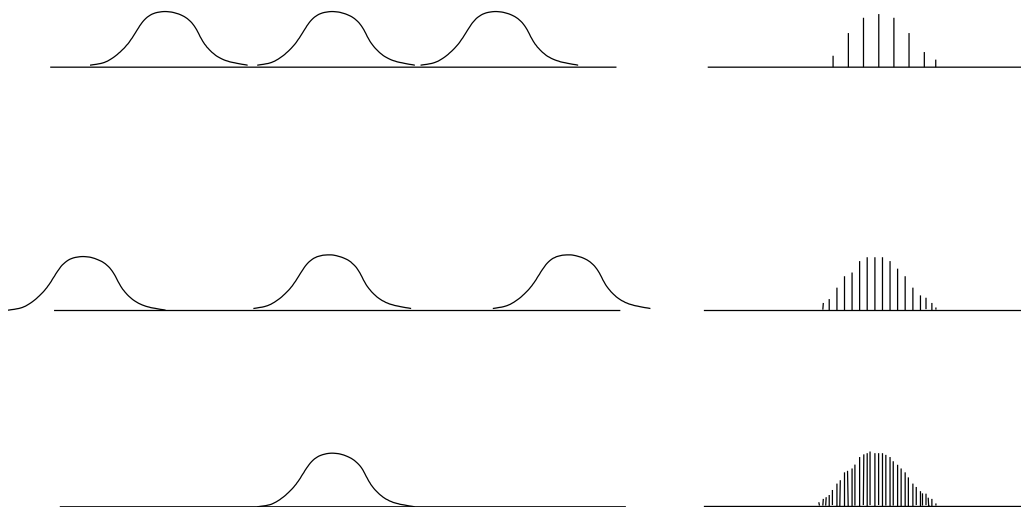


FIGURE 1. Des séries de Fourier à la transformée de Fourier

2. Définition, formule inverse

On dira qu'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est intégrable sur \mathbb{R} si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

existe (donc est convergente). On notera $L^1(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R} .

DÉFINITION 2.1. Soit f une fonction intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ix\xi} dx .$$

Comme f est intégrable sur \mathbb{R} , l'intégrale est bien définie pour tout ξ . De plus, la transformée de Fourier \hat{f} est bornée, et on a

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, |\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx .$$

Notons aussi que (comme pour les séries de Fourier) différentes définitions diffèrent en particulier par le coefficient qui est choisi. Celui que nous prenons ici a l'avantage d'être proche de celui que nous avons déjà utilisé pour les séries de Fourier, et aussi (comme pour les séries de Fourier) de donner une certaine symétrie entre la transformée de Fourier et la transformé de Fourier inverse, et à la formule de Plancherel.

Pour la transformée de Fourier, on utilise toujours l'analogie de la série de Fourier complexe, et non pas une version réelle (ce qui en principe serait possible aussi, mais pas très pratique).

DÉFINITION 2.2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction intégrable sur \mathbb{R} , sa transformée de Fourier inverse est la fonction

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi .$$

On a bien sûr un théorème de reconstruction, qu'on peut énoncer comme suit. On admettra cet énoncé ici.

THÉOREME 2.3. *Supposons que $f \in L^1(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Alors $\check{\hat{f}} = f$.*

Distributions. Dans la pratique, on prend souvent la transformée de Fourier de fonctions qui ne sont pas dans $L^1(\mathbb{R})$, par exemple la fonction $t \rightarrow \cos(t)$. Pour donner un sens rigoureux à cette opération, il faut introduire la notion de distribution. Les distributions sont des “fonctions généralisées” qui fournissent un cadre général pour traiter de la transformée de Fourier — et de beaucoup d'autres opérations souvent utilisées en physique.

3. Propriétés

On va mentionner ici quelques propriétés importantes de la transformation de Fourier. A chaque fois, une propriété correspondante peut être énoncée pour la transformée de Fourier inverse.

PROPOSITION 3.1 (Linéarité). *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $a \in \mathbb{C}$. Alors $f + ag \in L^1(\mathbb{R})$, et $\widehat{(f + ag)} = \hat{f} + a\hat{g}$.*

La preuve suit de manière immédiate de la linéarité de l'intégrale en x .

PROPOSITION 3.2 (Translation en x). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soit f_0 la fonction définie par $f_0(x) = f(x - x_0)$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\hat{f}_0(\xi) = e^{-ix_0\xi} \hat{f}(\xi)$.*

La preuve est à nouveau une conséquence directe de la définition.

PROPOSITION 3.3 (Changement d'échelle). *Pour tout $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, si on définit une fonction $h \in L^1(\mathbb{R})$ par $h(x) = f(ax)$, alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a*

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right).$$

La preuve est encore une conséquence immédiate de la définition. C'est aussi le cas pour la proposition suivante.

PROPOSITION 3.4 (Conjugaison). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ on a $\hat{\hat{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.*

COROLLAIRE 3.5. *f est à valeurs réelles si et seulement si \hat{f} est hermitienne, c'est-à-dire telle que $\hat{f}(-\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$. f est à valeurs imaginaires pures si et seulement si \hat{f} est anti-hermitienne, c'est-à-dire telle que $\hat{f}(-\xi) = -\overline{\hat{f}(\xi)}$.*

PROPOSITION 3.6 (Dérivation). *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ dérivable, telle que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Alors pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $f'(\hat{f}) = i\xi \hat{f}(\xi)$. En conséquence, si f est assez régulière, on a aussi $f^{(n)}(\hat{f}) = (i\xi)^n \hat{f}(\xi)$ pour tout n .*

Ceci permet, comme dans le cas des séries de Fourier, de relier la régularité d'une fonction à la décroissance de sa transformée de Fourier. On revient sur ce point plus bas.

4. Produit et convolution

Le produit de convolution est l'analogue, du côté des fréquences, du produit usuel des fonctions.

DÉFINITION 4.1. *Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. On définit leur produit de convolution $f * g$ par*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y)dy.$$

On peut aussi écrire, de manière plus symétrique mais moins explicite :

$$(f * g)(x) = \int_{y+z=x} f(y)g(z) .$$

REMARQUE 4.2. Sous cette forme on voit facilement que le produit de convolution est :

- commutatif : $f * g = g * f$,
- associatif : $f * (g * h) = (f * g) * h$.

EXEMPLE 4.3. Soit ϕ la fonction égale à $1/2$ sur $[-1, 1]$, et zéro ailleurs. Alors :

- Le produit de convolution $\phi * \phi$ est la fonction “triangulaire” qui est continue et affine par morceaux, qui vaut 0 hors de $[-2, 2]$ et 1 en 0 (exercice). Si on fait des produits de convolution successifs $\phi * \dots * \phi$ on trouve des fonctions de plus en plus régulières, polynomiales par morceaux.
- Si f est une fonction dans L^1 , prendre le produit de convolution $f * \phi$ revient à prendre en chaque point x une moyenne des valeurs de f entre $x - 1$ et $x + 1$.

PROPOSITION 4.4. Si $f, g \in L^1 \cap L^2$, alors $f * g$ est bien définie et est dans L^1 , de plus

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g(u)| du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)| ds .$$

La preuve est laissée en exercice.

Le produit de convolution a aussi une relation directe avec la dérivation.

PROPOSITION 4.5. Soit $f \in L^1 \cap L^2$ et $g \in L^1 \cap L^2$ dérivable. Alors $f * g$ est dérivable, et $(f * g)' = f * g'$.

On admettra cette proposition ici, car la démontrer exige des outils techniques (dérivation d’une intégrale dépendant d’un paramètre), mais la preuve est très simple si on suppose par exemple que g est à support compact.

5. Formule de Parseval

Il est en fait possible d’étendre la définition de la transformée de Fourier (et de la transformée de Fourier inverse) aux fonction qui sont dans $L^2(\mathbb{R})$. On a alors la propriété essentielle suivante, qui sera admise ici.

THÉORÈME 5.1 (Formule de Plancherel). Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier est aussi dans $L^2(\mathbb{R})$, et on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi .$$

En d’autres termes, la transformée de Fourier est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. Cette formule a aussi souvent une interprétation physique en termes d’énergie.

COROLLAIRE 5.2 (Formule de Parseval). Soit $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\bar{g}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\bar{\hat{g}}(\xi) d\xi .$$

Ceci suit du théorème par la formule de polarisation.

La formule de Plancherel a des conséquences intéressantes. D’une part, on peut “reconnaître” les fonctions de L^2 en connaissant seulement leur transformée de Fourier : ce sont les fonctions dont la transformée de Fourier est dans L^2 . Mais on peut aussi reconnaître les fonctions qui sont

dans H^1 , c'est-à-dire les fonctions de L^2 qui ont une dérivée (au sens faible) qui est dans L^2 : ce sont les fonctions f telles que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

6. Exemples

On va voir quelques exemples élémentaires mais très utiles.

EXEMPLE 6.1. La fonction rectangle f égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$. Sa transformée de Fourier est

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\xi/2)}{\xi/2}.$$

EXEMPLE 6.2. La fonction "Gaussienne" $x \rightarrow e^{-ax^2}$ joue un rôle particulièrement important en probabilités et statistiques. Sa transformée de Fourier est

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\xi^2/4a}.$$

La gaussienne est donc sa propre transformée de Fourier, à un changement d'échelle près.

7. Transformée de Fourier dans \mathbb{R}^n

On peut considérer la transformée de Fourier non seulement dans \mathbb{R} , mais plus généralement dans \mathbb{R}^n . On note $L^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace vectoriel des fonctions localement intégrales de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} , telles que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n < \infty.$$

DÉFINITION 7.1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, sa transformée de Fourier est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx_1 \cdots dx_n.$$

La transformée de Fourier inverse est alors donnée par la formule :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} g(\xi) e^{i\langle x, \xi \rangle} d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

La plupart des propriétés de la transformée de Fourier de \mathbb{R} sont encore valables dans le cadre de \mathbb{R}^n .

8. Exercices

Produit de convolution.

8.1. Soit ϕ la fonction égale à 1 sur $[-1/2, 1/2]$ et à 0 ailleurs. On note ϕ^{*n} le produit de convolution de ϕ n fois avec elle-même, par exemple $\phi^{3*} = \phi * \phi * \phi$.

- (1) Calculer $\phi * \phi$. Montrer que c'est une fonction continue, affine par morceaux.
- (2) Calculer $\phi * \phi * \phi$. Montrer que c'est une fonction C^1 , à support compact, et qu'il existe un nombre fini d'intervalles qui recouvrent \mathbb{R} sur lesquels cette fonction est un polynôme de degré au plus 2.
- (3*) Montrer que la même description s'applique à ϕ^{*n} , mais avec des polynômes de degré au plus $n - 1$.

8.2. Soit ψ une fonction C^∞ à support compact, d'intégrale égale à 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on pose

$$\psi_n(x) = n\psi(nx) .$$

- (1) Montrer que ψ_n est encore à support compact et que son intégrale est 1. Quel est son support ?
- (2) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * \psi_n)(x) = f(x) .$$

Transformée de Fourier.

8.3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}$ telle que $f_n : x \rightarrow x^n f(x)$ soit dans $L^1(\mathbb{R})$. Exprimer la transformée de Fourier de f_n en fonction de celle de f .

8.4. Calculer les transformée de Fourier des fonctions suivantes.

- (1) $f_a(x) = e^{-a|x|}$, pour $a > 0$.
- (2) $g_a(x) = e^{-ax^2}$ pour $a > 0$.
- (3) $f(x) = 1$ pour $x \in [-1/2, 1/2]$, $f(x) = 0$ ailleurs.
- (4) $g(x) = x + 1$ pour $x \in [-1, 0]$, $g(x) = 1 - x$ pour $x \in [0, 1]$, $g(x) = 0$ ailleurs.

Principe d'incertitude. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C^∞ à support compact.

- (1) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = -2\operatorname{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \bar{f}'(x) dx \right) .$$

- (2) En déduire que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} .$$

- (3) Montrer qu'on a égalité dans cette inégalité lorsque f est une gaussienne, c'est-à-dire une fonction de la forme $x \rightarrow a^{-bx^2}$, $b > 0$.

L'inégalité obtenue a une interprétation physique : si la fonction f est "localisée" au voisinage de 0, sa transformée de Fourier ne peut pas être bien localisée au voisinage de 0 aussi. En mécanique quantique, ça se traduit sous la forme du "principe d'incertitude de Heisenberg" : deux variables conjuguées, comme la position et l'impulsion d'une particule, ne peuvent pas être simultanément localisées ; si la position est déterminée précisément, l'impulsion ne peut pas l'être aussi.

Transformée de Laplace

Motivations

La transformée de Laplace peut être considérée comme une extension ou une généralisation de la transformée de Fourier : au lieu de considérer seulement des fréquences ξ réelles, on considère un paramètre “fréquentiel” complexe, et on peut s’intéresser en particulier au cas où ce paramètre est réel. Une différence importante est que la transformée de Laplace admet une transformée inverse qui est d’une forme assez différente, contrairement à la transformée de Fourier.

Mais les applications de la transformée de Laplace sont en partie différentes de celles de la transformée de Fourier. Si elle sert aussi à résoudre des équations différentielles, la transformée de Laplace joue un rôle particulier en probabilité, du fait de ses relations avec le calcul des moments des fonctions. Elle est largement utilisée pour résoudre des équations différentielles et intégrales en physique et en ingénierie.

La construction rigoureuse de la transformée de Laplace est aussi plus délicate que pour la transformée de Fourier. Une grande partie des résultats présentés dans ce chapitre seront admis.

Un peu d’histoire

La découverte de la transformée de Laplace est attribuée à Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), dans le cadre de ses travaux sur les probabilités. Laplace était un mathématicien et astronome, dont les travaux ont eu une influence importante dans divers domaines mais en particulier en probabilités et statistiques.

Objectifs du chapitre

Comprendre et savoir utiliser les principales propriétés de la transformée de Laplace.

1. Définition et inversion

On peut donner la définition suivante de la transformée de Laplace, qui devra être précisée pour ce qui concerne les valeurs possibles du paramètre s .

DÉFINITION 1.1. *Soit $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$. Sa transformée de Laplace est la fonction $\mathcal{L}f$ définie par*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \mathcal{L}f(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt .$$

Sous cette forme, $\mathcal{L}f$ n’est pas partout définie en général (elle l’est par exemple si f est à support compact). Si f est dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{L}f$ est bien définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle est positive ou nulle.

Dans certains cas on est conduit à appliquer la transformée de Laplace à une mesure qui a un poids non nul en zéro, par exemple la distribution de Dirac δ_0 . Dans ce cas il faut utiliser une

définition légèrement différente pour tenir compte de ce poids en zéro :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \mathcal{L}f(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\infty} f(t)e^{-st} dt .$$

On peut noter une ressemblance, voire une relation assez précise, avec la transformée de Fourier : si on se limite à prendre $s = i\xi$, avec ξ réel, on retrouve la transformée de Fourier (à l'exception du coefficient de normalisation $1/\sqrt{2\pi}$, qui n'est d'habitude pas utilisé pour la transformée de Laplace).

On utilise parfois aussi une transformée de Laplace bilatérale. On ne l'utilisera pas dans le reste du cours.

DÉFINITION 1.2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Sa transformée de Laplace bilatérale est la fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} (définie pour tous les $s \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ si $f \in L^1(\mathbb{R})$) et qui envoie $s \in \mathbb{C}$ sur

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt .$$

On dispose d'une transformation inverse, qui est appelée transformation de Mellin. En fait on peut définir la transformée de Mellin seulement pour les fonctions "méromorphes", c'est une notion pas encore vue en cours mais qui est toujours satisfaite par les transformées de Laplace de fonctions "raisonnables".

DÉFINITION 1.3. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ méromorphe, sa transformée de Mellin est définie par

$$(\mathcal{M}F)(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\gamma+is)t} F(\gamma+is) ds ,$$

où $\gamma > 0$ est choisi de manière que :

- l'intégrale converge,
- en $\pm\infty$, $F(\gamma+is)$ tend vers zéro au moins aussi vite que $1/s^2$.

Sous ces conditions, l'intégrale ne dépend pas du choix de γ .

2. Propriétés

On dispose pour la transformée de Laplace de propriétés assez similaires à celles de la transformée de Fourier. On considère ici deux fonctions $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, mais dans la pratique vous serez conduits à utiliser ces propriétés pour des fonctions (ou distributions) beaucoup plus générales. Sauf précision contraire, les preuves sont élémentaires, du moins pour des fonctions dans C_0^∞ .

PROPOSITION 2.1 (Linéarité). Soient $a, b \in \mathbb{C}$, alors $\mathcal{L}(af + bg) = a(\mathcal{L}f) + b(\mathcal{L}g)$.

PROPOSITION 2.2 (Dérivation). On a pour tout $s \in \mathbb{C}$:

$$(\mathcal{L}f')(s) = s(\mathcal{L}f)(s) - f(0^-)$$

$$(\mathcal{L}f'')(s) = s^2(\mathcal{L}f)(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$$

$$(\mathcal{L}f^{(n)})(s) = s^n(\mathcal{L}f)(s) - s^{n-1}f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$$

où $f(0^-) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(-\epsilon)$.

PROPOSITION 2.3 (Dilatation en fréquence). Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}f .$$

PRINCIPE DE LA PREUVE. Intégration par parties. □

On peut exploiter cette relation pour calculer les moments d'une fonction f (ou d'une mesure). La notion de moment est importante en probabilités. Le n -ième moment de f est défini comme

$$\mu_n = \int_0^{\infty} t^n f(t) dt .$$

PROPOSITION 2.4 (Relation avec les moments de f). *On a :*

$$\mu_n = (-1)^n (\mathcal{L}f)^{(n)}(0) .$$

Pour la proposition suivante on est conduit à considérer une fonction f qui n'est pas nécessairement dans C_0^∞ .

PROPOSITION 2.5 (Limites en 0 et ∞). *Si f admet une limite en ∞ (resp. en 0^+) alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \in 0} p(\mathcal{L}f)(p) , \text{ resp. } \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \in \infty} p(\mathcal{L}f)(p) .$$

PROPOSITION 2.6 (Convolution). $\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L}f)(\mathcal{L}g)$.

3. Exercices

3.1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa transformée de Laplace, et préciser son domaine de définition (l'ensemble des p pour lesquels l'intégrale qui définit la transformée de Laplace converge).

- (1) La fonction de Heaviside H , qui vaut 1 sur $[0, \infty[$ et 0 ailleurs.
- (2) $t \mapsto t^n$, pour $n \in \mathbb{N}$,
- (3) $t \mapsto e^{at}$, pour $a \in \mathbb{R}$,
- (4) $t \mapsto t^n e^{at}$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$,
- (5) $t \mapsto e^{at} \sin(\omega t)$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$,
- (6) $t \mapsto t^n \cos(\omega t)$, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\omega > 0$,
- (7) $t \mapsto t^2 H(t)$,
- (8) $t \mapsto (t^2 + t)e^{-t} H(t)$.

3.2. Résolution d'équation différentielle. Utiliser la transformée de Laplace pour trouver les solutions des équations différentielles suivantes sur $[0, \infty[$.

- (1) $y'(t) + y(t) = t(H(t) - H(t - 1))$, avec la condition initiale $y(0) = 0$.
- (2) $y''(t) - y'(t) + y(t) = H(t)$, avec les conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
- (3) $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = e^{-2t} H(t)$, avec les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Introduction aux équations aux dérivées partielles

Motivations

Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une équation qui exprime les dérivées partielles d'une fonction (ses dérivées par rapport aux différentes coordonnées) en fonction d'une autre fonction, souvent avec des conditions imposées sur une partie de l'espace où on veut les résoudre.

Les EDP jouent un rôle essentiel dans presque tous les domaines de la physique, ainsi que pour de très nombreuses applications. Leur étude théorique a fait des progrès considérables au cours des 60 dernières années, mais les possibilités informatiques contemporaines ont aussi permis des progrès énormes dans leur résolution approchée.

Un peu d'histoire

Les bases des équations aux dérivées partielles, telles qu'elles sont présentées ici de manière très rapide, sont apparues au XVIIIème et XIXème siècle. On peut citer par exemple Laplace (1749-1827), Poisson (1781-1842) ou Dirichlet (1805-1859) pour les équations elliptiques faisant intervenir le laplacien, Fourier (1768-1830) pour l'équation de la chaleur, d'Alembert (1717-1783) ou Lagrange (1736-1813) pour l'équation des ondes.

Mais l'étude de ces équations a continué de se développer au cours du XXème siècle, et il constitue aujourd'hui une branche très importante des mathématiques. L'étude des équations aux dérivées partielles a aussi été une motivation essentielle pour le développement d'autres parties des mathématiques, comme l'analyse fonctionnelle.

Objectifs du chapitre

A l'issue de ce chapitre, les étudiants devraient savoir :

- reconnaître différents types d'équations aux dérivées partielles et avoir une idée sur le comportement de leurs solutions,
- savoir utiliser les séries de Fourier ou la transformée de Fourier (suivant les cas) pour étudier une équation aux dérivées partielles.

1. Introduction

On va voir d'abord quelques propriétés générales des EDP.

Linéarité. Les EDP qu'on va considérer ici sont *linéaires*. Ceci signifie qu'elles sont de la forme

$$P(u) = v ,$$

où v est une fonction fixée et u est la fonction inconnue, à déterminer. Ici P est un opérateur linéaire, c'est-à-dire tel que

$$P(au + bu') = aP(u) + bP(u')$$

si u, u' sont deux fonctions et a, b sont deux constantes.

On fixe souvent aussi des conditions “aux limites”, c’est-à-dire qu’on demande que u ou certaines de ses dérivées prennent des valeurs particulières sur un certain sous-ensemble (une droite, un plan, etc). On peut leur associer une équation *homogène*, qui est l’équation

$$P(u) = 0$$

et on remplace alors les conditions “au bord” par l’annulation de u (ou de ses dérivées) sur l’ensemble fixé.

Ces équations linéaires ont des propriétés générales, qui suivent de la définition.

- si u, u' sont deux solutions, alors $u - u'$ est une solution de l’équation homogène associée,
- les solutions de l’équation homogène forment un espace vectoriel, en particulier la fonction nulle est toujours solution.

Différents types d’EDP. On peut distinguer trois types particulièrement importants.

- Les EDP elliptiques, comme l’équation de Laplace. Leurs solutions tendent à être régulières, et on peut souvent les résoudre en imposant la valeur de la solution au bord d’un domaine.
- Les EDP paraboliques, où une variable (typiquement le temps) joue un rôle particulier. Leurs solutions tendent à être de plus en plus régulières quand le temps augmente.
- Les EDP hyperboliques, comme l’équation des ondes. Leurs solutions ne sont pas nécessairement régulières, et on peut typiquement les résoudre en imposant des “conditions initiales” pour un “temps” donné.

2. Cordes vibrantes

C’est l’un des exemples les plus simples d’équation aux dérivées partielles, qui met bien en lumière le lien avec les séries de Fourier. Elle apparaît quand on modélise le comportement d’une corde de violon, par exemple.

On considère l’EDP suivante :

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

où v est une vitesse de propagation, et on se place sur un intervalle de longueur finie, par exemple $x \in [0, L]$. On considère de plus les solutions $u(x, t)$ qui satisfont aux conditions aux bords :

$$\forall t, u(0, t) = u(L, t) = 0 .$$

De plus, on cherche des solutions régulières en x et en t , pour que l’EDP (8) ait un sens.

On peut commencer par faire un changement de variable en x et en t pour se ramener au cas où $v = 1$ et où $L = 2\pi$, de manière à simplifier un peu les notations. L’équation devient :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} ,$$

avec $u(0, t) = u(2\pi, t) = 0$ pour tout t .

On pose $u_t = u(\cdot, t)$. Les conditions au bord permettent de “périodiser” u_t , c’est-à-dire de la remplacer par une fonction périodique de période 2π , qui reste continue.

On cherche les solutions en décomposant u_t en séries de Fourier :

$$u_t = a_0(t) + \sum_{k \geq 1} a_k(t) \cos(kx) + b_k(t) \sin(kt) .$$

En utilisant (3) et en identifiant les termes deux à deux, on obtient que :

$$a_0''(t) = 0, a_k''(t) = k^2 a_k(t), b_k''(t) = k^2 b_k(t)$$

pour tout $k \geq 1$ et tout t . On en déduit que a_k et b_k sont des fonctions de la forme

$$a_k(t) = a'_k \cos(kt) + a''_k \sin(kt)$$

et de même pour $b_k(t)$. Mais alors les a'_k, a''_k sont les coefficients de Fourier de $u_t(0)$, et sont donc nuls. De même, $a_0(t)$ doit être nul, et on obtient donc les solutions sous la forme :

$$(4) \quad u_t(x) = \sum_{k \geq 1} (b'_k \cos(kt) + b''_k \sin(kt)) \sin(kx) .$$

3. Equation de Laplace et équation de Poisson

3.1. Définition. On considère une fonction $v : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, ou $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, et l'équation suivante, appelée équation de Poisson :

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = v ,$$

pour une fonction indéterminée u . On note généralement cette équation

$$\Delta u = v .$$

On appelle équation de Laplace l'équation homogène associée, soit $\Delta u = 0$.

On voit apparaître cette équation dans des situations très variées, par exemple en électrostatique, ou dans la gravité newtonnienne. Dans ces cas v est la charge (resp. la masse) et u est le potentiel électrique (resp. le potentiel newtonnien). C'est une EDP *elliptique*.

3.2. Sur le tore. On dispose de deux types de résultats pour cette équation. D'une part, un énoncé d'existence et d'unicité.

THÉORÈME 3.1. *Soit $v \in L^2(S^1 \times S^1)$ une fonction de moyenne nulle. Il existe une unique fonction $u \in H^2(S^1 \times S^1)$ de moyenne nulle telle que $\Delta u = v$. Toutes les fonction de la forme $u + C$, avec C une constante, sont alors aussi solution.*

PRINCIPE DE LA PREUVE. Soient $c_{k,l}$ les coefficients de Fourier de v , et $c'_{k,l}$ ceux de u . L'équation (5) se traduit, sur les coefficients de Fourier, par

$$-(k^2 + l^2)c'_{k,l} = c_{k,l} .$$

Comme v est supposée de moyenne nulle, $c_{0,0} = 0$, et pour les autres valeurs de k, l il existe une unique valeur possible de $c'_{k,l}$.

Comme on suppose $v \in L^2(S^1 \times S^1)$, on a

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} |c_{k,l}|^2 < \infty ,$$

donc

$$\sum_{k,l \in \mathbb{Z}} (k^2 + l^2)^2 |c'_{k,l}|^2 < \infty ,$$

ce qui montre que u est dans $H^2(S^1 \times S^1)$. □

3.3. Dans \mathbb{R}^2 . Les mêmes idées s'appliquent dans \mathbb{R}^2 , mais il faut alors bien noter qu'un trouve une unique solution uniquement si on se place dans un espace fonctionnel adapté, dont la définition "contient" une condition de décroissance de la solution u en l'infini. Par exemple, si on prend $v = 0$, on voit que l'équation $\Delta u = 0$ a pour solution toutes les fonctions affines, puisque leurs dérivées sont nulles. Mais parmi elles seule la solution nulle est dans $H^2(\mathbb{R}^2)$.

THÉORÈME 3.2. *Soit $v \in L^2(\mathbb{R}^2)$, il existe une unique fonction $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ telle que $\Delta u = v$.*

Le principe de la preuve est le même que pour le tore, on considère les transformées de Fourier de u et de v et on voit qu'elles doivent satisfaire l'équation :

$$-(\xi^2 + \nu)^2 \hat{u}(\xi, \nu) = \hat{v}(\xi, \nu) ,$$

ce qui détermine uniquement \hat{u} .

3.4. Dans des domaines à bord. L'énoncé principal, qu'on ne va pas détailler ici, est que si Ω est un ouvert borné à bord régulier par morceaux dans \mathbb{R}^2 , alors l'équation $\Delta u = v$ a une unique solution qui prend des valeurs prescrites sur le bord de Ω .

4. Equation de la chaleur

4.1. Définition. L'équation de la chaleur modélise l'évolution de la température d'une plaque en fonction du temps, en présence de sources de chaleur.

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + v .$$

C'est une EDP *parabolique*. On peut noter que cette équation n'est pas du tout symétrique quand on remplace t par $-t$: la "direction" du temps joue un rôle très important. On va voir que les solutions tendent à être de plus en plus régulières avec le temps.

4.2. Dans $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$. Si on se place dans $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$, on peut utiliser la décomposition de la solution (pour chaque temps fixé) pour montrer qu'une solution existe et est unique pour tout choix d'une fonction en $t = 0$. On se limite ici au cas où $v = 0$.

THÉORÈME 4.1 (Admis). *Soit $u_0 : S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dans L^2 . Il existe une unique fonction $u : S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, régulière pour $t > 0$, solution de (6), et telle que $u(\cdot, \cdot, 0) = u_0$.*

Le principe de la preuve de ce résultat est simple (même si une preuve complète conduit à des petites subtilités techniques). On considère une solution $u(x, y, t) = u_t(x, y)$, et ses coefficients de Fourier en x, y seulement, soit $c_{k,l}(t)$. L'équation se traduit alors sous la forme :

$$\partial_t c_{k,l}(t) = -(k^2 + l^2) c_{k,l}(t) .$$

De plus pour $t = 0$ les coefficients de Fourier doivent être ceux de u_0 . Or les équations différentielles que satisfont les coefficients ont une unique solution qui prennent une valeur donnée en $t = 0$:

$$c_{k,l}(t) = c_{k,l}(0) e^{-(k^2 + l^2)t} .$$

On voit en particulier que :

- (1) L'intégrale de u_t est constante (elle correspond, à un coefficient près, à $c_{0,0}(t)$ qui est constant.
- (2) Dès que $t > 0$, les coefficients décroissent exponentiellement vite avec $|k| + |l|$. Il suit que les fonctions u_t sont C^∞ pour tout $t > 0$.

4.3. Dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. On a un résultat très similaire, à condition de se restreindre à une classe de fonctions adaptée.

THÉORÈME 4.2 (Admis). *Soit $u_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dans L^2 . Il existe une unique fonction $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, régulière pour $t > 0$ et telle que $u(\cdot, \cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, solution de (6), et telle que $u(\cdot, \cdot, 0) = u_0$.*

Le principe de la preuve est le même, et on peut aussi faire les mêmes remarques que dans $S^1 \times S^1$. Il faut maintenant considérer la transformée de Fourier de u_t , et remarquer qu'elle satisfait l'équation

$$\partial_t \hat{u}_t(\xi, \eta) = -(\xi^2 + \eta^2) \hat{u}_t(\xi, \eta) .$$

5. Equation des ondes

5.1. Définition. C'est l'équation suivante.

$$(7) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u .$$

C'est une EDP *hyperbolique*. Elle modélise par exemple le déplacement d'ondelettes à la surface de l'eau, mais joue aussi un rôle essentiel dans différents domaines de la physique (électromagnétisme, etc).

Les solutions ne sont pas nécessairement régulières, par contre elles font apparaître des phénomènes de *propagation* à vitesse finie.

On remarque que cette équation est symétrique par rapport à la transformation $t \mapsto -t$: le sens du temps ne joue pas de rôle.

5.2. Dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. L'équation se simplifie sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} .$$

On a alors la remarque évidente suivante.

REMARQUE 5.1. Toute fonction de la forme $u(x, t) = f(x-t)$ ou $u(x, t) = f(x+t)$ est solution.

En fait, la réciproque est (presque) vraie : les solutions de l'équation des ondes en dimension $1 + 1$ sont exactement les sommes d'une fonction de $x - t$ et d'une fonction de $x + t$. En d'autres termes on a propagation à vitesse 1, soit vers les x croissants, soit vers les x décroissants.

5.3. Dans $S^1 \times S^1 \times \mathbb{R}$. On peut utiliser une décomposition en série de Fourier pour t fixé, et considérer les coefficients de Fourier $c_{k,l}(t)$, $t \geq 0$. L'équation (7) se met alors sous la forme

$$\frac{\partial^2 c_{k,l}}{\partial t^2}(t) = -(k^2 + l^2) c_{k,l}(t) .$$

Si on fixe des conditions initiales en $t = 0$ sous la forme

$$u_t = u_0, \partial_t u_t = u_1$$

en $t = 0$, on voit que les coefficients de Fourier $c_{k,l}(t)$ seront uniquement déterminés par les conditions que $c_{k,l}(0) = c_{k,l}^0$ et que $c'_{k,l}(0) = c_{k,l}^1$, où $c_{k,l}^0$ et $c_{k,l}^1$ sont les coefficients de Fourier de u_0 et de u_1 , respectivement. On parle de conditions de Cauchy : on fixe la valeur de u et de sa dérivée par rapport au temps en $t = 0$.

De plus, le comportement asymptotique de $c_{k,l}(t)$ en fonction de k, l , et donc la régularité de u_t , est essentiellement contrôlé par les quantités correspondantes pour u_0 et pour u_1 (on ne va pas approfondir ce point ici).

5.4. Dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Le même argument peut être utilisé dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ en utilisant les transformées de Fourier au lieu des séries de Fourier. Si on note $\hat{u}_t(\xi, \eta)$ la transformée de Fourier de u_t en x et en y , on obtient l'équation

$$\partial^2 \hat{u}_t(\xi, \eta) = -(\xi^2 + \eta^2) \hat{u}_t(\xi, \eta),$$

d'où une unique solution pour des conditions initiales fixées en $t = 0$ du type $u = u_0, \partial_t u = u_1$.

6. Exercices

6.1. Equation des cordes vibrantes. On considère l'équation des cordes vibrantes :

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

avec les conditions aux bords :

$$\forall t, u(0, t) = u(2\pi, t) = 0.$$

On se donne des fonctions u_0, u_1 régulières sur $[0, 1]$ qui s'annulent en 0 et en 2π . Montrer qu'il existe une unique solution $u : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie (8) avec pour tout $x \in [0, 2\pi]$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x).$$

6.2. Equation de Laplace pour les fonctions radiales.

- (1) On considère une fonction $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ radiale, c'est-à-dire ne dépendant que de $r = \sqrt{x^2 + y^2} : u(x, y) = \bar{u}(\rho)$. Ecrire le laplacien Δu de u en fonction des dérivées de \bar{u} par rapport à u .
- (2) Déterminer une solution de l'équation $\Delta u = v$ lorsque v est la fonction caractéristique du disque de rayon 1 dans \mathbb{R}^2 .
- (3) Déterminer une solution de $\Delta u = v$ lorsque v est la mesure de Dirac en 0.
- (4) Etendre les résultats précédents pour une fonction radiale de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} .

6.3. * Equation de la chaleur sans source. Déterminer la solution de l'équation de la chaleur $\partial_t u = \Delta u$ correspondant aux conditions initiales suivantes dans \mathbb{R}^2 .

- (1) $u_0(x, y) = 1$ pour $x, y \in [-1, 1]$, $u_0(x, y) = 0$ ailleurs.
- (2) u_0 égale à la mesure de Dirac en zéro.

6.4. * Température d'un plan dont on chauffe une région. On considère ici la fonction v égale à $v(x, y) = 1$ pour $x, y \in [-1, 1]$, $v(x, y) = 0$ ailleurs.

- (1) Donner une description (par exemple par une formule intégrale) d'une solution de l'équation

$$\partial_t u = \Delta u + v$$

avec la condition initiale $u_0 = 0$ en $t = 0$.

- (2) Déterminer la limite u_∞ de u_t quand $t \rightarrow \infty$, et vérifier qu'elle est solution de l'équation $\Delta u + v = 0$.
- (3) Calculer le flux du gradient de u_∞ à travers un cercle de rayon $R > 2$. Donne une interprétation "physique" du résultat.

Bibliographie

- [HQ86] M. Hulin and M.F. Quinton. *Outils mathématiques pour la physique : premier cycle universitaire et formation permanente, classes préparatoires*. Collection U. Armand Colin, 1986.
- [LM98] F. Liret and D. Martinais. *Mathématiques pour le DEUG : Analyse 2ème année*. DEUG MIAS, MASS et SM. Cours de mathématiques. Dunod, 1998.
- [MW85] Jerrold Eldon Marsden and Alan Weinstein. *Calculus : 1-3*, volume 2. Springer. Disponible en ligne : <http://www.cds.caltech.edu/marsden/volume/Calculus/>, 1985.
- [Spi06] M. Spivak. *Calculus*. Calculus. Cambridge University Press, 2006.
- [Ste08] J. Stewart. *Calculus*. Available 2010 Titles Enhanced Web Assign Series. Thomson Brooks/Cole, 2008.
- [Str91] G. Strang. *Calculus*. Number Bd. 1. Wellesley-Cambridge Press, 1991.