L3 MAPES — Topologie
2007-08
Correction du devoir no 1, 12 octobre 2007

1. Exercice

Soit $M \in \mathbf{R}$.

Comme $\lim_\infty u_n = l > 0$, il existe $N_u \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_u$, $|u_n - l| \leq l/2$. Il suit que pour $n \geq N_u$, $u_n \geq l/2$.

Comme $\lim_\infty v_n = 0$, il existe $N_v \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $n \geq N_v$,

$$v_n \leq l/2M \ .$$

Soit maintenant $N = \max(N_u, N_v)$. Pour $n \geq N$ on a $n \geq N_u$ et donc $u_n \geq l/2$, et $n \geq N_v$ si bien que $v_n \leq l/2M$. Donc $u_n/v_n \geq M$. Nous avons ainsi montré que $\lim_\infty u_n/v_n = \infty$.

2. Exercice

2.1. La fonction $x \mapsto 1/x$ est continue sur $\mathbf{R}$ privé de 0, et la fonction sin est continue. Comme la composée de deux fonctions continues est continue, on en déduit que f est continue sur $\mathbf{R}$ privé de 0.

Montrons que f n'est pas continue en 0. On prendra pour cela $\epsilon = 1/2$. Soit $\alpha > 0$, on choisit $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq 1/2\pi\alpha$, puis on pose

$$x = \frac{1}{2\pi n + \pi/2} \ .$$

Alors

$$|x| \leq \frac{1}{2\pi n} \leq \alpha \ ,$$

alors que

$$f(x) = \sin(1/x) = \sin(2\pi n + \pi/2) = \sin(\pi/2) = 1 \ .$$

On en déduit que f n'est pas continue en 0.

2.2. On remarque que $g(x) = xf(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, y compris 0. Comme le produit de deux fonctions continues est continue, g est continue en dehors de 0. On va montrer que g est continue en 0.

Soit $\epsilon > 0$, on pose $\alpha = \epsilon$. Si $|x \leq \alpha$ alors

$$|g(x)| = |x \sin(1/x)| \leq |x| \leq \epsilon \ .$$

Ceci montre que g est continue en 0, donc elle est continue sur $\mathbf{R}$.

3. Problème : espace de fonctions

3.1. Les éléments de C_c^0 sont des fonctions continues à support compact. C'est le cas aussi de leurs carrés, qui sont donc intégrables.

3.2. Soit $f, g \in C_c^0$, soit $\lambda > 0$. Alors $f + \lambda g$ est encore dans C_c^0 et donc de carré sommable. On a :

$$\int (f(x) - \lambda g(x))^2 dx \geq 0 \ ,$$

ce qui se traduit par :

$$\int f(x)^2 dx - 2\lambda \int f(x)g(x)dx + \lambda^2 \int g(x)^2 dx \geq 0 \ .$$

On prend

$$\lambda = \frac{\int f(x)g(x)dx}{\int g(x)^2 dx} \ ,$$

on obtient que

$$\int f(x)^2dx - 2\frac{\left(\int f(x)g(x)dx\right)^2}{\int g(x)^2dx} + \frac{\left(\int f(x)g(x)dx\right)^2}{\int g(x)^2dx} \geq 0 \ .$$

On en tire que

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int f(x)^2dx . \int g(x)^2dx \ ,$$

comme nécessaire.

NB : cette question et la suivante sont des analogues directs des résultats du cours concernant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de Minkowski pour les suites.

3.3. Soit $f, g \in C_c^0$, alors

$$\int (f(x)+g(x))^2dx = \int f(x)(f(x)+g(x))dx + \int g(x)(f(x)+g(x))dx$$

$$\leq \left(\int f(x)^2dx \int (f(x)+g(x))^2dx\right)^{1/2} + \left(\int g(x)^2dx \int (f(x)+g(x))^2dx\right)^{1/2} \ ,$$

et donc

$$\left(\int (f(x)+g(x))^2dx\right)^{1/2} \leq \left(\int f(x)^2dx\right)^{1/2} + \left(\int g(x)^2dx\right)^{1/2} \ ,$$

d'où le résultat.

3.4. d_2 est bien une fonction de $C_c^0 \times C_c^0$ à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Il suffit de montrer que d_2 vérifie les propriétés de :

- symétrie. C'est clair par définition que $d_2(f,g) = d_2(g,f)$.
- séparation. On note que $d_2(f,g) = 0$ ssi

  $$\int (f(x)-g(x))^2dx = 0$$

  donc ssi $f = g$.
- inégalité triangulaire. C'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski puisque, pour $f, g, h \in C_c^0$ on a

  $$d_2(f,h) = \sqrt{\int (h(x)-f(x))^2dx} = \sqrt{\int ((h(x)-g(x)) + (g(x)-f(x)))^2dx}$$

  $$\leq \sqrt{\int (h(x)-g(x))^2dx} + \sqrt{\int ((g(x)-f(x))^2dx} = d_2(f,g) + d_2(g,h) \ .$$

3.5. Si $f, g \in C_c^0$ alors $f - g$ est une fonction continue à support borné, elle est donc bornée et $d_\infty(f,g)$ est bien définie. Pour montrer que d_∞ définit une distance sur C_c^0 on doit vérifier les trois points suivant.

- La symétrie : il est clair par définition que $d_\infty(f,g) = d_\infty(g,f)$.
- La séparation : si $d_\infty(f,g) = 0$ alors $\sup_{\mathbf{R}} |f(x) - g(x)| = 0$ si bien que $f = g$.
- L'inégalité triangulaire : si $f, g, h \in C_c^0$ alors $|f-g|$ et $|g-h|$ sont des fonctions continues nulles hors d'un compact, donc elles sont majorées et atteignent leurs bornes sup en des points x_0 et y_0, respectivement. Alors :

  $$d_\infty(f,h) = \sup_{\mathbf{R}} |f-h| = \sup_{\mathbf{R}} |(f-g)+(g-h)| \leq \sup_{\mathbf{R}}(|f-g|+|g-h|) \leq$$

  $$\leq |f(x_0) - g(x_0)| + |g(y_0 - h(y_0)| = d_\infty(f,g) + d_\infty(g,h) \ .$$

3.6. Les distances d_2 et d_∞ ne sont pas équivalentes. Considérons la suite de fonctions (f_n) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définies comme suit. $f_n(x) = 1/n$ pour $x_in[0,n^2]$, $f_n(x) = 0$ sinon. Il est facile de voir que $d_\infty(0,f_n) = 1/n$ alors que $d_2(0,f_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

3.7. On note que la fonction f n'est pas dans C_c^0 car elle n'est pas à support compact. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n = f 1_{[-n,n]}$, où $1_{[-n,n]}$ est l'indicatrice de $[-n, n]$ (la fonction qui vaut 1 sur cet intervalle et 0 ailleurs). Alors $f - f_n$ est de carré sommable et plus précisément :

$$\int_{\mathbf{R}} (f(x) - f_n(x))^2 dx = 2 \int_n^{\infty} \frac{1}{(1+x)^2} dx = 2 \int_{n+1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{n+1} \ .$$

On en déduit que si $p, q \in \mathbf{N}$ on a

$$d_2(f_p, f_q)^2 = \int_{\mathbf{R}} (f_p(x) - f_q(x))^2 dx = \int_{\mathbf{R}} ((f_p(x) - f(x)) + (f(x) - f_q(x)))^2 dx \leq$$

$$\leq 2 \int_{\mathbf{R}} (f_p(x) - f(x))^2 dx + 2 \int_{\mathbf{R}} (f_q(x) - f(x))^2 dx \leq \frac{4}{p+1} + \frac{4}{q+1} \ ,$$

et donc

$$d_2(f_p, f_q) \leq 2 \sqrt{\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1}} \ .$$

On en déduit facilement que (f_n) est de Cauchy.

Mais (f_n) n'a pas de limite dans C_c^0 pour d_2 : si une telle limite, soit f', existait, on pourrait trouver pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbf{N}$ un $n \geq N$ tel que $d_2(f_n, f') \leq 0$. On aurait alors d'après le calcul ci-dessus

$$\int_{\mathbf{R}} (f(x) - f'(x))^2 dx \leq 2 \int_{\mathbf{R}} (f_n(x) - f(x))^2 dx + 2 \int_{\mathbf{R}} (f_n(x) - f'(x))^2 dx \leq 2\epsilon^2 + 2 \sqrt{\frac{1}{n+1}} \ .$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout n arbitrairement grand, on devrait avoir $f' = f$, or $f \notin C_c^0$.

Donc (C_c^0, d_2) n'est pas complet.

3.8. Le même argument fonctionne aussi avec d_∞, en utilisant que

$$\sup_{\mathbf{R}} (|f_n(x) - f(x)|) = \frac{1}{n+1} \ ,$$

qui permet à la fois de montrer que (f_n) est de Cauchy et qu'elle n'a pas de limite dans (C_c^0, d_∞).