L3 MAPES — Topologie
2007-08
Devoir no 1, 12 octobre 2007
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Exercice

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}, (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites à valeurs strictement positives telles que $\lim_\infty u_n = l > 0$ et $\lim_\infty v_n = 0$. Montrer rigoureusement, en utilisant la définition de la limite, que $\lim_\infty (u_n/v_n) = \infty$.

2. Exercice

Etudier la continuité des fonctions suivantes :

2.1. $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et par $f(0) = 0$.

2.2. $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = x\sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et par $g(0) = 0$.

3. Problème : espace de fonctions

On considère l'espace C_c^0 des fonctions continues à support compact.

3.1. Rappeler pourquoi les fonctions de C_c^0 sont de carré sommable.

3.2. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les fonctions : si $f, g \in C_c^0$ alors

$$\left|\int f(x)g(x)dx\right|^2 \leq \int f(x)^2dx. \int g(x)^2dx\ .$$

3.3. Montrer l'inégalité de Minkowski pour les fonctions :
si $f, g \in C_c^0$ alors

$$\sqrt{\left|\int (f(x)+g(x))^2dx\right|} \leq \sqrt{\int f(x)^2dx} + \sqrt{\int g(x)^2dx}\ .$$

3.4. Pour $f, g \in C_c^0$, on définit :

$$d_2(f,g) = \sqrt{\int (f(x)-g(x))^2dx}\ .$$

Montrer que d_2 définit une distance sur C_c^0.

3.5. Pour $f, g \in C_c^0$, on définit :

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)-g(x))|\ .$$

Montrer que d_∞ est bien définie et définit une distance sur C_c^0.

3.6. Les distances d_2 et d_∞ sont-elles équivalentes ?

3.7. L'espace métrique (C_c^0, d_2) est-il complet ?

3.8. L'espace métrique (C_c^0, d_∞) est-il complet ?