UNIVERSITE PAUL SABATIER

Corrigé abrégé du devoir de Topologie no 2, L3 MAPES

Exercice 1. Soit B la boule unité fermée dans V. On applique la caractérisation de Borel-Lebèsgue des compacts. B est recouverte par les ouverts $B(x, 1/2)$ pour $x \in B$, comme B est compacte on peut en extraire un sous-recouvrement fini, soit

$$B \subset \cup_{i=1}^{n} B(x_i, 1/2) \ .$$

On pose $W = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)$, on va montrer que $B \subset \overline{W}$. On choisit $y_0 \in B$, on peut écrire $y_0 = z_1 + y_1$, où z_1 est l'un des x_i – et est donc dans W – et $\|y_1\| < 1/2$. Comme $\|2y_1\| < 1$ on peut aussi écrire $2y_1$ comme la somme de l'un des x_i et d'un élément $2y_2$ de norme au plus $1/2$, on voit ainsi que

$$y_0 = z_1 + z_2 + y_2, \text{ avec } z_0, z_1 \in W, \|y_2\| < 1/4 \ .$$

On peut répéter cette opération pour y_2, et par un raisonnement par récurrence élémentaire on voit que

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} z_i \ ,$$

où tous les z_i sont dans W. Donc y_0 est limite d'une suite d'éléments de W, donc $y_0 \in \overline{W}$. Il suit que $B \subset \overline{W}$.

Soit B' la boule unité fermée dans W (pour la norme induite par $\|\|$. Alors B est contenue dans l'adhérence de B' dans V. Mais B' est compacte car W est de dimension finie, donc B' est fermée (dans V), et donc $B \subset B'$. Comme l'inclusion inverse est évidente, $B = B'$. Il suit par homogénéité que tout élément de V est inclus dans W, et donc $V = W$, et V est de dimension finie.

Exercice 2. i) Soit S le cercle unité centré en 0. On va montrer que $B \setminus A = S$.

Soit d'abord $m \in S$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $m = (\cos(\theta), \sin(\theta))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $x_n = \theta + 2\pi n$. Alors

$$f(x_n) = \frac{\theta + 2\pi n}{1 + \theta + 2\pi n}(\cos(\theta), \sin(\theta)) \to_{n\to\infty} m \ .$$

Donc $m \subset B$. Mais la définition de A montre que tous les éléments de A sont de norme strictement inférieure à 1. Donc $m \notin A$, si bien que $m \in B \setminus A$. Donc $S \subset B \setminus A$.

Réciproquement, soit $m \in B \setminus A$. Par définition, il existe une suite (x_n) dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x_n) \to m$. On considère deux cas. On note que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\|f(x)\| < 1$, et donc $\|m\| \leq 1$.

1er cas : $\|m\| < 1$. Il existe alors un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $\|m\| = x/(x + 1)$. Comme la norme est continue, $\|f(x_n)\| \to x/(x+1)$, et donc $x_n/(x_n+1) \to x/(x+1)$. Comme la fonction $x \to x/(x+1)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$ (à démontrer) on en déduit que $x_n \to x$. Comme f est continue, $f(x_n) \to f(x)$, et donc $m = f(x) \in A$, contradiction.

2ème cas : $\|m = 1\|$. Alors $m \in S$.

Donc $B \setminus A \subset S$, et donc $B \setminus A = S$.

ii) B est l'adhérence de A, donc B est fermé. De plus A est borné (contenu dans la boule ouverte de rayon 1) donc B est borné aussi (contenu dans la boule fermée de rayon 1). Donc B est compact.

iii) Sa définition montre que A est connexe par arcs (c'est l'image de $\mathbb{R}_+$, qui est connexe par arcs, par une applications continue). Donc A est connexe. Pour montrer que B est connexe, on va considérer une fonction continue $u : B \to \{0, 1\}$. Comme A est connexe u prend une seule valeur sur A, on peut supposer (quitte à remplacer u par $1 - u$) que c'est 0.

Soit $x \in B$, alors par définition de l'adhérence x est la limite d'une suite (x_n) d'éléments de A. Mais $u(x_n) = 0$ pour tout n et u est continue, donc $u(x) = 0$. Donc u est constante sur B. Ainsi B est connexe.

iv) Soit $m_0 = (0, 0)$, et soit $m_1 = (1, 0)$. On va montrer qu'il n'existe pas d'application continue $c : [0, 1] \to B$ telle que $c(0) = m_0$ et que $c(1) = m_1$. On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence d'une telle application.

Comme $\|c(1)\| = 1$ et c est continue, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires deux suites $(s_n), (t_n)$ de nombres positifs tels que

$$0 < s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots < 1$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|c(s_n)\| = 2n\pi/(1 + 2n\pi), \|c(t_n)\| = (2n + 1)\pi/(1 + (2n + 1)\pi)$$

Comme l'application $x \mapsto \|f(x)\|$ est strictement croissante, on voit que $c(s_n) = f(2n\pi/(1 + 2n\pi))$, $c(t_n) = f((2n+1)\pi/(1+(2n+1)\pi))$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty} \|c(s_n) - c(t_n)\| = 2$, si bien que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|s_n - t_n| \leq \varepsilon$ alors que $\|c(s_n) - c(t_n)\| \geq 1$.

Or c est continue et donc uniformément continue puisque $[0, 1]$ est compact, il suit une contradiction. Donc B n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3. i) Pour vérifier que $\|\|_1, \|\|_\infty$ et $\|\|_*$ sont des normes il suffit de vérifier les trois points de la définition : séparation, homogénéité, inégalité triangulaire.

Pour montrer que $\|\|_1$ et $\|\|_\infty$ ne sont pas équivalentes on remarque que $\|Q_n\|_\infty = 1$ pour tout n, alors que $\|Q_n\|_1 = n + 1$. De plus, $\|Q_n\|_* = n$ pour tout n (le max est atteint en 1) si bien que $\|\|_*$ et $\|\|_\infty$ ne sont pas non plus équivalentes. On note aussi que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\|P_n\|_1 = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = (1 + 1)^n = 2^n \ ,$$

alors que $\|P_n\|_* = 1$ (le max est atteint en 0). Il suit que $\|\|_*$ et $\|\|_1$ ne sont pas équivalentes.

ii) Notons d'abord que N est bien définie : pour chaque élément P de E, l'expression de $N(P)$ ne fait apparaître qu'un nombre fini de termes non nuls.

Il faut à nouveau montrer que N vérifie les propriétés de séparation, homogénéité et inégalité triangulaire. On se limite ici à l'inégalité triangulaire (les deux autres propriétés sont immédiates). Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k, B = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes, soit $n = \max(p, q)$, on étend les suites $(a_k), (b_k)$ par 0 pour k strictement supérieur à p (resp. q). Alors :

$$N(A + B) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k |a_k + b_k| \leq \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (|a_k| + |b_k|) = N(A) + N(B) \ ,$$

c'est l'inégalité triangulaire recherchée.

iii) NB : il fallait montrer que N et N' sont *équivalentes* si et seulement si les suites (λ_k/λ'_k) et (λ'_k/λ_k) sont bornées.

Supposons d'abord que les suites (λ_n/λ'_n) et (λ'_n/λ_n) sont bornées. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_n/\lambda'_n \leq C,\ \lambda'_n/\lambda_n \leq C \ .$$

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in E$, on a alors :

$$N(A) = \sum_{k=0}^{p} \lambda_k |a_k| \leq \sum_{k=0}^{p} C\lambda'_k |a_k| = CN'(A) \ ,$$

et par le même raisonnement en échangeant N et N', $N'(A) \leq CN(A)$. Les deux normes sont donc équivalentes.

Réciproquement, supposons que N et N' sont équivalentes, il existe donc une constante $C > 0$ telle que

$$\forall P \in E, \frac{N(P)}{C} \leq N'(P) \leq CN(P) \ .$$

On applique cette relation pour $P = X^n$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on obtient que

$$\frac{\lambda_n.|1|}{C} \leq \lambda'_n.|1| \leq C\lambda_n.|1| \ ,$$

si bien que (λ_n/λ'_n) et (λ'_n/λ_n) sont toutes deux bornées par C.

Exercice 4. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, et soit $X = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. Le théorème de Cauchy-Schwarz montre que, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 \leq (\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{j=1}^{n} x_j^2) \ .$$

En faisant la somme sur i on trouve que :

$$\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j)^2 \leq \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2)(\sum_{j=1}^{n} x_j^2) = (\sum_{j=1}^{n} x_j^2)\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2) \ ,$$

ce qui se traduit par :

$$\|AX\|^2 \leq \|X\|^2|||A||| \ ,$$

ce qui est le résultat demandé.