UNIVERSITE PAUL SABATIER

Devoir de Topologie no 2, L3 MAPES
A rendre le mercredi 28 novembre

Exercice 1. Soit $(V, ||.||)$ un espace vectoriel normé tel que la boule fermée $\overline{B(0,1)}$ de rayon 1 centrée en 0 dans V est compacte. Montrer que V est de dimension finie.

Exercice 2. i) Notons $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$f(x) = \left(\frac{x \sin(x)}{x+1}, \frac{x \cos(x)}{x+1} \right)$$

pour tout $x \in [0, \infty[$, et notons $A = f([0, \infty[)$ l'image de f dans $\mathbb{R}^2$ equipé de la métrique euclidienne. Notons $B = adh(A)$ l'adhérence de A. Déterminer l'ensemble $B \setminus A$. (On pourra faire un dessin !)

ii) Montrer que B est compact.

iii) Montrer que B est connexe.

iv) Montrer que B n'est pas connexe par arcs.

Exercice 3. i) On pose $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on note :

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \ \|P\|_\infty = \max_{k=0}^{n} |a_k|, \ \|P\|_* = \max\{|P(t)|, 0 \leq t \leq 1\} \ .$$

Montrer que ce sont des normes, et qu'elles sont deux à deux non équivalentes. *Indication :* on pourra considérer $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n$.

ii) On chosit une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs, et on lui associe la fonction $N : E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k |a_k| \ .$$

Montrer que N est une norme sur E.

iii) Soit $(\lambda'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite, et N' la norme qui lui est associée de la même manière. Montrer que N et N' sont équivalentes si et seulement si les suites (λ_k/λ'_k) et (λ'_k/λ_k) sont bornées.

Exercice 4. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ on pose : $|||A||| = \sqrt{tr(A^t A)}$. Montrer que cela définit une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ et que, pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\|Ax\| \leq |||A|||.\|x\| \ ,$$

où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de x.