

L3 MAPES — Topologie
2007-08
Feuille d'exercice no 1

1. Soit E un ensemble, et soient $A, B \in P(E)$. Comparer :
 1. $P(A \cup B)$ et $P(A) \cup P(B)$,
 2. $P(A \cap B)$ et $P(A) \cap P(B)$.
2. Soit E, F des ensembles, A, B des sous-ensembles de F , et $f : E \rightarrow F$ une application. Dire si les deux assertions sont vraies ou fausses, en justifiant soigneusement votre réponse.
 1. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
 2. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
3. De même, si $A, B \subset E$, est-il vrai que :
 1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$?
 2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$?
4. Montrer que toute suite convergente est bornée.
5. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Ecrire mathématiquement (avec des quantificateurs) :
 1. f est continue sur \mathbf{R} ,
 2. f n'est pas continue sur \mathbf{R} .
6. Montrer rigoureusement que :
 1. le produit de deux suites qui tendent vers l'infini est une suite tendant vers l'infini,
 2. si (u_n) et (v_n) sont deux suites tendant respectivement vers u et v alors leur produit tend vers uv ,
 3. si (u_n) tend vers l'infini et si (v_n) tend vers $v \neq 0$ alors leur produit tend vers $\pm\infty$ (on précisera).
7. Montrer (rigoureusement) que la composée de deux applications continues est continue.
8. Etudier la continuité des fonction f de \mathbf{R} dans \mathbf{R} définies par :
 1. $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $f(x) = 1$ si $x \in \mathbf{Q}$.
 2. $f(x) = 0$ si $x \notin \mathbf{Q}$, $f(x) = x$ si $x \in \mathbf{Q}$.
9. Rappeler la définition d'une fonction uniformément continue sur \mathbf{R} . Les fonctions suivantes, définies sur \mathbf{R} , sont-elles uniformément continues ?
 1. $f(x) = 1$ si $x \geq 0$, $f(x) = 0$ si $x < 0$.
 2. $f(x) = x$.
 3. $f(x) = x^2$.
10. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue qui tend vers 0 en $\pm\infty$. Montrer que f est bornée, puis que f est uniformément continue.
11. Soit (u_n) une suite, soit $l \in \mathbf{R}$. Montrer que l est valeur d'adhérence de (u_n) ssi

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbf{N}, \exists n \geq N, |u_n - l| \leq \epsilon .$$

12. Soit (u_n) une suite réelle. On considère la suite des moyennes arithmétiques, définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + \cdots + u_n}{n+1} .$$

Montrer que si (u_n) converge alors (v_n) converge. La réciproque est-elle vraie ?