

L3 MAPES — Topologie  
2007-08  
Feuille d'exercice no 2

1. Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $(u_{2n}), (u_{2n+1})$  et  $(u_{3n})$  soient convergentes. Montrer que  $(u_n)$  est convergente.
2. Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonction continues est continue. Est-ce vrai pour une limite simple de fonctions continues ?
3. Soit  $(u_n)$  une suite réelle bornée, on définit

$$\limsup u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} u_k ,$$

$$\liminf u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} u_k .$$

1. Montrer que ces deux limites existent.
  2. Montrer que si  $l$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)$ , alors
$$\liminf u_n \leq l \leq \limsup u_n .$$
  3. Comparer  $\limsup(u_n + v_n)$  et  $\limsup u_n + \limsup v_n$ .
  4. Montrer que si  $(u_n)$  est bornée et  $(v_n)$  est convergente, alors  $\limsup u_n + v_n = \limsup u_n + \lim v_n$ .
4. Soit  $(E, d)$  un espaces métrique complet, et soit  $f : E \rightarrow E$  une application telle que  $f^p$  est contractante de rapport  $k \in ]0, 1[$ , pour un certain  $p \in \mathbf{N}^*$ . Montrer que  $f$  a un unique point fixe dans  $E$ .
  5. Soit  $a < b$  deux réels, et soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  continue. Montrer que  $f$  a au moins un point fixe.
  6. Soient  $(E, d_E)$  et  $(F, d_F)$  des espaces métriques, et soit  $f : E \rightarrow F$ . Montrer que :
    1. si l'image réciproque de tout ouvert de  $F$  est un ouvert de  $E$ , alors  $f$  est continue.
    2. si l'image réciproque de tout fermé de  $F$  est un fermé de  $E$ , alors  $f$  est continue.
  7. Dire si les espaces métriques suivant sont complets.
    1.  $\mathbf{Q}$  muni de la distance canonique de  $\mathbf{R}$ ,
    2.  $\mathbf{R}^2$ , muni de la distance euclidienne,
    3.  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , muni de la distance euclidienne,
    4. l'espace des suites dont presque tous les termes sont nuls (tous les termes sauf un nombre fini) muni de la distance  $l_2$ .
  8. Dans  $\mathbf{R}^2$ , les distances  $d_1, d_E$  et  $d_\infty$  sont-elles équivalentes ?
  9. Soit  $E$  un ensemble muni de deux distances  $d_1$  et  $d_2$  équivalentes.
    1. Montrer que si  $(E, d_1)$  est complet, alors  $(E, d_2)$  est complet.
    2. Montrer que si  $(E, d_1)$  est compact, alors  $(E, d_2)$  est compact.