L3 MAPES — Topologie
2007-08
Feuille d'exercice no 4

1. Soit E un ensemble muni de deux métriques d et d'. Montrer que :

1. Si d et d' sont équivalentes, alors l'identité de (E,d) dans (E,d') est un homéomorphisme.
2. Plus précisément, cette application identité est uniformément continue et d'inverse uniformément continue.
3. Montrer que d est équivalente à d' ssi l'identité de (E,d) dans (E,d') est lipschitzienne et son inverse est lipschitzienne.

NB : la notion d'équivalence entre espace métriques définie dans le cours est parfois appelée "lipschitz-équivalence".

2. Montrer que les espaces suivants sont connexes par arcs.

1. Le segment $[0,1]$.
2. Le cercle unité dans $\mathbf{R}^2$.
3. Le disque unité dans $\mathbf{R}^2$.

3*. On considère l'ensemble $E \subset \mathbf{R}^2$ constitué de la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$, $x \neq 0$, et de l'axe $0y$.

1. E est-il connexe par arcs ?
2. Montrer que E est connexe.

4. Soit (E,N) un EVN, soient $x,y,z \in E$ tels que $x+y+z=0$. Montrer que

$$N(x-y)+N(y-z)+N(z-x) \geq \frac{3}{2}(N(x)+N(y)+N(z)) \ .$$

5. Soit (E,N) un EVN, soit $A \subset E$ une partie non vide. Pour tout $x \in E$ on pose

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\} \ .$$

1. Montrer que pour $x,y \in E$ on a
$$|d(x,A) - d(y,a)| \leq N(y-x) \ .$$
2. Montrer que l'application $d_A : x \mapsto d(x,A)$ est continue.
3. Soit $A \subset E$ non vide, montrer que l'adhérence de A est égale à $d_A^{-1}(0)$.
4. Soit $A, B \subset E$ non vides, montrer que $d_A = d_B$ ssi l'adhérence de A est égale à l'adhérence de B.

6. On considère les fonctions $N_p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ définies pour $p \geq 0$ réel comme suit :

$$N_p(x) = \left(\sum_{i=1} x_i^p\right)^{1/p} \ .$$

1. Montrer que N_p est une norme pour tout $p \geq 1$. Qu'en est-il pour $p \in]0,1[$?
2. Montrer explicitement que N_1 et N_2 sont équivalentes, en trouvant des constante optimales c et C telles que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,
$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x) \ .$$
3. Même question avec N_1 et N_∞ puis avec N_2 et N_∞.

7. Soit A un sous-ensemble d'un EVN (E,N). Pour $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $a \in E$ on note λA l'image de A par l'homothétie de rapport λ, $\lambda A = \{\lambda x, x \in A\}$, et $A + a$ l'image de A par la translation de rapport a.

1. Exprimer en fonction du diamètre de A le diamètre de λA et de $A + a$.
2. Montrer que pour tout $a \in E$ et $r > 0$ on a
$$a + rB_o(0,1) = B_o(a,r) \ .$$

8. Soit E un espace vectoriel, et soient N, N' deux normes sur E. On suppose que N et N' ont les même boules unité. Montrer que $N = N'$.