UNIVERSITE PAUL SABATIER

Topologie L3 MAPES, Feuille TD No. 5

Exercice 1. Soient E un e.v.n. et $f : E \to E$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{\max(1, \|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}[x]$ muni de la norme : $\|\sum_i a_i x^i\| = \sum_i |a_i|$

i) Est ce que $\phi : P \mapsto P(x+1)$ est continue ?

ii) Est ce que $\psi_A : P \mapsto AP$ est continue ? ($A \in E$ fixé)

iii) Reprendre les quéstions précédentes avec la norme :
$\|P\| = \sup\{e^{-|t|}|P(t)|, t \in \mathbb{R}\}$

Exercice 3. Soient E un $\mathbb{R}$-e.v.n. et $f : E \to \mathbb{R}$ linéaire.

i) Montrer que f est continue si et seulement si $\ker f$ est fermé (pour le réciproque : supposer $\ker f$ fermé, montrer que $\{x \mid f(x) > 0\}$ est ouvert, puis étudier $\{x \mid -1 < f(x) < 1\}$

ii) On suppose f continue. Soit $x \in E$. Montrer que $|f(x)| = \|f\| d(x, \ker f)$

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert et V un s.e.v. de H. Montrer que :

i) $V^\perp$ est fermé

ii) $adh(V) = V^{\perp\perp}$ et $adh(V)^\perp = V^\perp$

iii) V est dense si et seulement si $V^\perp = \{0\}$

Exercice 5. Soient H un espace de Hilbert, C une partie convexe fermée de H, et Q une partie convexe, compacte de H qui ne rencontre pas C. Montrons qu'il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement C et Q

a) Montrer que l'application $x \to \|x - p_C(x)\|$ atteint son minimum sur Q, où p_C est la projection orthogonale sur C. On note x_0 un point qui réalise ce minimum

b) M.q. $\|x_0 - p_C(x_0)\|$ réalise la distance de C à Q. En déduire que la projection orthogonale de $p_C(x_0)$ sur Q est x_0.

c) Soit l la forme linéaire $y \mapsto \langle y, p_C(x_0) - x_0\rangle$ et notons $m = (x_0 + p_C(x_0))/2$. M.q. $l(y) < l(m) < l(z)$ pour tout $y \in Q$, $z \in C$

d) Conclure.