UNIVERSITE PAUL SABATIER

Topologie L3 MAPES,
Eléments de réponse pour la feuille TD No. 6

Exercice 1.

(1) La convergence de la série de terme général $(|\alpha_n|^2)_{n\geq 0}$ est une conséquence immédiate de l'inégalité de Bessel.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p$. On a

$$\left\|\sum_{k=p}^{q} \alpha_k e_k\right\|^2 = \sum_{k=p}^{q} |\alpha_k|^2 \ ,$$

et la suite $(\sum_0^n |\alpha_k|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il suit directement que $(\sum_0^n \alpha_k e_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi de Cauchy, donc convergente puisque H est complet.

(2) V est sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, c'est donc lui-même un espace de Hilbert. Toujours par définition, (e_k) est une base hilbertienne de V. De plus, pour tout k, il est clair que $\langle x_V, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle$, et donc, d'après le théorème de Parseval, $x_V = \sum_k \alpha_k e_k$, et $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x_V\|^2$.

(3) $x \in H$ appartient à V si et seulement si $x - x_V = 0$. Or par orthogonalité $\|x\|^2 = \|x_V\|^2 + \|x - x_V\|^2$, si bien que $x = x_V$ si et seulement si $\|x\|^2 = \|x_V\|^2$. Donc c'est le cas si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$.

Exercice 2. Soit $x \in H$ non nul, on peut écrire $x = P_V(x) + (x - P_V(x))$, et les deux termes sont orthogonaux, si bien que $\|x\|^2 = \|P_V(x)\|^2 + \|x - P_V(x)\|^2$, et donc $\|P_V(x)\| \leq \|x\|$. Donc $\|P_V\| \leq 1$.

Soit $x \in V$ avec $x \neq 0_H$, alors $P_V(x) = x$, donc $\|P_V(x)\| = \|x\|$. Il suit que $\|P_V\| = 1$.

Exercice 3.

(1) Supposons que $x_n \to x$, alors $x_n - x \to 0$. Pour tout $y \in H$ on a pour tout n, $|\langle x_n - x \mid y\rangle| \leq \|x_n - x\|.\|y\|$, et $\|x - n - x\| \to 0$, donc $\langle x_n - x \mid y\rangle \to 0$. C'est vrai pour tout $y \in H$, donc $x_n \rightharpoonup x$.

(2) Supposons que $x_n \rightharpoonup x$, alors on voit, en prenant $y = x$ dans la définition, que $\langle x_n \mid x\rangle \to \|x\|^2$. Comme $\|x_n\|^2 \to \|x\|^2$ on en déduit que :

$$\langle x - x_n \mid x - x_n\rangle = \|x\|^2 + \|x_n\|^2 - 2\langle x \mid x_n\rangle \to 0 \ ,$$

et donc $x_n \to x$.

(3) Soit $y \in H$, la série $\sum_k \langle x_k \mid y\rangle^2$ est convergente et de somme majorée par $\|y\|^2$ d'après l'inégalité de Bessel. Il suit par un raisonnement élémentaire que la suite $(\langle x_k \mid y\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, si bien que $x_n \rightharpoonup 0$. Par contre (x_n) ne tend pas vers 0 puisque si c'était le cas on aurait $\|x_n\| \to 0$.

Exercice 4.

(1) Comme $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne, on a pour $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q \geq p$:

$$\|Q_q - Q_p\|^2 = \left\|\sum_{k=p+1}^{q} \frac{P_k}{k+1}\right\|^2 = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{(k+1)^2} \ .$$

Comme $\sum 1/(k+1)^2$ converge, on voit que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

(2) Supposons que (Q_n) soit convergente de limite Q, on aurait alors $\langle Q, P_n\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle Q_k, P_n\rangle = 1/(n+1)$, et donc $Q = \sum_n P_n/(n+1)$. Mais alors Q ne pourrait pas être de degré fini, et ne pourrait donc pas être un polynôme. Donc $\mathbb{R}[X]$ n'est pas complet.

Exercice 5. On laisse cet exercice au lecteur...