UNIVERSITE PAUL SABATIER

Topologie L3 MAPES, Feuille TD No. 6

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H. Soit V la fermeture du sous-espace engendré par la famille $(e_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in H$, on pose $\alpha_n = \langle x \mid e_n\rangle$.

(1) Montrer que la série $(|\alpha_n|^2)_{n\geq 0}$ converge dans $\mathbb{R}$. En déduire que la suite $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k)_{n\geq 0}$ converge dans H.

(2) Montrer que $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n = x_V$ où x_V est la projection de x sur V. En déduire que $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x_V\|^2 \leq \|x\|^2$.

(3) Montrer que $x \in H$ appartient à V si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$.

Exercice 2. Soit V un s.e.v. fermé d'un Hilbert H tel que $V \neq \{0_H\}$. Soit P_V la projection orthogonale sur V. Montrer que $\|P_V\| = 1$.

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$. On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H converge faiblement vers un élément x de H si, pour tout $y \in H$,

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x_n \mid y\rangle = \langle x \mid y\rangle.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$.

(1) Montrer que $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$.

(2) Montrer que $[x_n \rightharpoonup x$ et $\|x_n\| \to \|x\|] \Rightarrow x_n \to x$.

(3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale de H. Montrer que $x_n \rightharpoonup 0_H$ mais $x_n \not\to 0_H$.

Exercice 4. On munit $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des polynômes, d'un produit scalaire quelconque $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$. Soit $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

On note $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la famille orthonormale construite par le procédé de Gram-Schmidt à partir des monômes $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$, et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille des polynômes définie par

$$Q_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} P_i.$$

(1) Montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}[X]$.

(2) En déduire que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 5. Soient E un espace de Hilbert et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties fermées convexes de E, d'intersection F non vide. Soit $a \in E$.
On admettra que F est un fermé convexe.
1) On pose $d_n = d(a, F_n) = \inf_{x\in F_n} ||a - x||$. Montrer que la suite de réels (d_n) est croissante et convergente. On appelle d sa limite.
2) On appelle a_n , α la projection de a respectivement sur F_n et F. Montrer, en utilisant le théorème de la médiane, que (a_n) est une suite de Cauchy de E. On appelle β sa limite.
3) Montrer que $\beta \in F$, que $||a - \beta|| = ||a - \alpha||$. En déduire que $\alpha = \beta$.