L3 MAPES — Topologie
2007-08
Corrigé abrégé de l'examen final, 22 janvier 2008

1. Exercice

On suppose d'abord que v est une valeur d'adhérence de (u_n), il existe donc $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(u_{\sigma(n)})$ converge vers v. Soit $\epsilon > 0$, et soit $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $d(u_{\sigma(n)}, v) \leq \epsilon$. On peut poser $n = \sigma(\max(n_0, N))$, alors $n \geq \max(n_0, N) \geq N$ et $d(u_{\sigma(n)}, v) \leq \epsilon$. Ceci montre que la propriété de l'énoncé est vérifiée.

Réciproquement, supposons la propriété de l'énoncé vérifiée. On construit récursivement $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la manière suivante. On pose $\sigma(0) = 0$. Pour tout $k \geq 1$, on applique la propriété avec $N = \sigma(k-1)+1$ et $\epsilon = 1/k$, on obtient un élément $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_k, v) \leq 1/n$ et que $n \geq \sigma(k-1)+1$, et on pose $\sigma(k) = n$. On vérifie immédiatement que σ est strictement croissante et que $u_{\sigma(n)} \to v$, si bien que v est valeur d'adhérence de (u_n).

2. Problème

2.1. Il suffit de vérifier les trois propriétés de la définition : séparation, symétrie, inégalité triangulaire. On laisse les détails au lecteur.

2.2. Il faut vérifier que pour tout f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, $\Phi_r(f)$ est aussi continue. On remarque pour cela que K est continue et $[a,b]$ compact, si bien que le résultat suit du théorème de continuité d'une intégrale par rapport à un paramètre. La linérarité de Φ_r est une conséquence directe de la définition.

2.3. Soit $M = \max_{(x,y \in [a,b]} |K(x,y)|$, qui existe parce que K est continue et $[a,b] \times [a,b]$ est compact. Soit $f, g \in E$, alors pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$\begin{aligned}
|\Phi_r(g)(x) - \Phi_r(f)(x)| &= \left| r\int_a^b K(x,y)g(y)dy - r\int_a^b K(x,y)f(y)dy \right| \\
&= = \left| r\int_a^b K(x,y)(g(y)-f(y))dy \right| \\
&\leq r\int_a^b |K(x,y)|.|g(y)-f(y)|dy \\
&\leq rM|b-a| \max_{y\in[a,b]} |g(y)-f(y)| \\
&\leq rM|b-a|d(f,g)\ .
\end{aligned}$$

Donc $d(\Phi_r(f), \Phi_r(g)) \leq rM|b-a|d(f,g)$, ce qui montre bien que Φ_r est Lipschitzienne de constante $rM|b-a|$. Pour rr assez petit (inférieur strictement à $1/M|b-a|$), Φ_r est contractante.

2.4. Les solutions de l'équation correspondent précisément aux fonctions $f \in E$ telles que $f = \Phi_r(f)$. Or pour r assez petit, Φ_r est contactante, et E est complet. Donc Φ_r a un unique point fixe, l'équation a donc une unique solution dans E.

3. Exercice

3.1. Notons que $(a_n) \in h^1$ si et seulement si $(na_n) \in l^2$. Si $(a_n), (b_n) \in h^1$ alors $(na_n), (nb_n) \in l^2$, si bien que

$$\langle (na_n), (nb_n) \rangle = \sum_n na_n \overline{nb_n} = \sum_n n^2 a_n \overline{b_n}$$

est convergente. Comme $\sum_n a_n \overline{b_n}$ est bien convergente (et égale à $\langle (a_n), (b_n) \rangle$) si bien que le terme de droite dans l'énoncé est bien défini. Pour montrer que $\langle , \rangle_1$ définit un produit scalaire sur h^1 il suffit de vérifier la définition (sésquilinéarité, positivité), on laisse les détails au lecteur.

3.2. Soit $(a_n) \in l^2$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on appelle u^N la suite définie par $u^N_n = a_n$ pour $n \leq N$, $u^N_n = 0$ pour $n > N$. Alors $u^N \in h^1$ puisque seul un nombre fini de termes est non nul. De plus,

$$\|(a_n) - u^N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2$$

et cette expression tend vers 0 quand $N \to \infty$. Donc $u^N \to (a_n)$ dans l^2. Ceci montre bien que h^1 est dense dans l^2.

3.3. La définition même de N et de N_1 montre que pour tout $(a_k) \in l^2$, $N_1(a_k) \geq N(a_k)$. Il n'existe pas de majoration de N_1 par N, en effet, si on appelle δ^n la suite définie par $\delta_k^n = 1$ pour $k = n$ et 0 ailleurs, on voit que $N(\delta^n) = 1$, $N_1(\delta^n) = \sqrt{1+n^2}$.

4. Problème

On note $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficient réels. Pour tout $P \in E$, on note

$$N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \ .$$

4.1. N est la restriction à E de la norme de $C^0([0,1])$, elle définit donc une norme sur E.

4.2. u n'est pas injective : pour tout $P \in E$, $P+1 \in E$ et $u(P) = u(P+1)$. u est par contre surjective, puisque tout $P \in E$ a une primitive dans E. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $u(X^n) = nX^{n-1}$ si bien que $N(u(X^n)) = n$, $N(X^n) = 1$ (dans les deux cas le sup est atteint en 1). L'application u n'est donc pas continue. Ce ne peut donc pas être un homéomorphisme.

4.3. v est clairement surjective, mais pas injective puisque seuls les polynômes qui s'annulent en 0 sont dans son image.

Soit $P \in E$, soit $t \in [0,1]$, alors $|u(P)(t)| = t|P(t)| \leq |P(t)|$, et donc $N(v(P)) \leq N(P)$ et v est continue. Par contre v n'est pas un homéomorphisme puisque non injective.

4.4. w est clairement bijective, d'inverse $P \mapsto P(X-1)$. Elle n'est pas continue, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $N(w(X^n)) = 2^n$ alors que $N(X^n) = 1$. Ce n'est donc pas non plus un homéomorphisme.