L3 MAPES — Topologie
2007-08
Examen final, 22 janvier 2008
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Exercice

Soit (E, d) un espace métrique, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans E, et soit $v \in E$. Montrer que v est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(u_n, v) \leq \epsilon \ .$$

2. Problème

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. On note $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, et

$$\begin{array}{llll} d: & E \times E & \to \mathbb{R} & \\ & (f, g) & \mapsto & \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \ . \end{array}$$

2.1. Montrer que d est une distance sur E. On admettra dans la suite que (E, d) est complet.

2.2. Soit $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue, et soit $\phi \in E$. Pour tout $f \in E$ et tout $r > 0$ on définit :

$$\Phi_r(f)(x) = r \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \phi(x) \ .$$

Montrer que si $\phi = 0$ alors Φ_r définit une application linéaire de E dans E.

2.3. Montrer que Φ_r est lipschitzienne, et qu'elle est contractante si r est assez petit.

2.4. En déduire que, si r est assez petit, l'équation en f :

$$\forall x \in [a, b], f(x) = r \int_a^b K(x, y)f(y)dy + \phi(x)$$

a une unique solution dans E.

3. Exercice

On note l^2 l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que $\sum_{\mathbb{N}} |a_n|^2 < \infty$, muni du produit scalaire :

$$\langle (a_n), (b_n)\rangle = \sum_n a_n \overline{b_n} \ .$$

On rappelle que c'est un espace de Hilbert. On note

$$h^1 = \{(a_n) \in l^2 \mid \sum n^2 |a_n|^2 < \infty\} \ .$$

3.1. Pour $(a_n), (b_n) \in h^1$, on pose :

$$\langle (a_n), (b_n)\rangle_1 = \sum_n (1 + n^2) a_n \overline{b_n} \ .$$

Montrer que l'expression de droite est bien définie, puis que cette équation définit un produit scalaire sur h^1.

3.2. Montrer que h^1 est dense dans l^2.

3.3. On note N la restriction à h^1 de la norme de l^2. Comparer N et la norme associée à $\langle , \rangle_1$, qu'on pourra appeler N_1. (Sont-elles équivalentes ? Est-ce que l'une est plus grande que l'autre ?)

4. Problème

On note $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficient réels. Pour tout $P \in E$, on note

$$N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \ .$$

4.1. Montrer que N définit une norme sur E.

4.2. On note $u : E \to E$ l'application qui à P associe P'. u est-elle injective ? Surjective ? Continue ? Est-ce un homéomorphisme ?

4.3. Même questions pour l'application $v : E \to E$ qui à P associe XP.

4.4. Même questions pour l'application $w : E \to E$ qui à P associe $P(X + 1)$.