L3 MAPES — Topologie
2007-08
Corrigé abrégé de l'examen de rattrapage, 27 Juin 2008

1. Exercice

1. La suite de terme général $v_n = \sup_{k\geq n} u_k$ est par définition décroissante, de plus elle est minorée parce que (u_n) est bornée et donc minorée. Il suit que (v_n) est convergente, si bien que $\limsup u_n$ existe. De même, la suite de terme général $w_n = \inf_{k\geq n} u_k$ est croissante et majorée, donc convergente.
2. Soit l est une valeur d'adhérence de (u_n), alors $l = \lim u_{\phi(n)}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) = geqn$ et donc
$$\inf_{k\geq n} u_k \leq u_{\phi(n)} \leq \sup_{k\geq n} u_k \ .$$
En passant à la limite, on voit que $\liminf_n u_n \leq l \leq \limsup_n u_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \geq n$ on a
$$u_k + v_k \geq \inf_{k\geq n} u_k + \inf_{k\geq n} v_k \ ,$$
donc
$$\inf_{k\geq n} u_k + v_k \geq \inf_{k\geq n} u_k + \inf_{k\geq n} v_k \ .$$
et on voit donc en passant à la limite quand $n \to \infty$ que
$$\liminf(u_n + v_n) \geq \liminf u_n + \liminf v_n \ .$$
Considérons maintenant l'exemple suivant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend $u_n = (-1)^n, v_n = (-1)^{n+1}$. Alors $\liminf u_n = -1, \liminf v_n = -1$, alors que $u_n + v_n = 0$ si bien que $\liminf u_n + v_n = 0$. On n'a donc pas en général $\liminf(u_n + v_n) \leq \liminf u_n + \liminf v_n$.
4. Soit $l = \lim v_n$. Soit $\epsilon > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall k \geq N, |v_k - l| \leq \epsilon \ .$$
Soit $n \geq N$, alors, pour tout $k \geq n$ on a $|v_k - l| \leq \epsilon$, si bien que
$$\inf_{k\geq n} u_n + v_n \geq \inf_{k\geq n} u_n + (l-\epsilon) \ , \quad \sup_{k\geq n} u_n + v_n \leq \sup_{k\geq n} u_n + (l+\epsilon) \ .$$
En passant à la limite quand $n \to \infty$,
$$\liminf(u_n + v_n) \geq \liminf u_n + (l-\epsilon) \ , \quad \limsup(u_n + v_n) \leq \limsup u_n + (l+\epsilon) \ .$$
Ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on en déduit le résultat demandé.

2. Exercice

1. L'axe (Oy) est clairement connexe par arc, et E_- et E_+ le sont aussi car ce sont les images par des applications continues $(x \mapsto (\pm x, \cos(1/x^2)))$ de la demi-droite $\mathbb{R}_+^*$, qui est connexe par arcs.
2. On va montrer que E a exactement trois composantes connexes par arcs, qui sont E_-, E_0 et E_+. On sait que ces sous-ensembles sont connexes par arcs, il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0)$ soit dans l'un de ces sous-ensembles et $\gamma(1)$ dans un autre.
Supposons d'abord que $\gamma(0) \in E_+$ et que $\gamma(1) \in E_0 \cup E_-$. Soit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, alors $x(0) > 0$. Soit $t_0 = \inf\{t \in [0,1], x(t) = 0\}$, et soit $y_0 = y(t_0)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\gamma(t) \in E_+$ pour tout $t < t_0$.
γ est continue donc y est continue donc il existe $\epsilon > 0$ telle que, pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0]$, $|y(t) - y_0| \leq 1/2$. Si $y_1 \in [-1,1] \setminus [y_0 - 1/2, y_0 + 1/2]$, on a $y(t) \neq y_1$ pour tout $t \in [t_0 - \epsilon, t_0[$. Comme $\gamma(t) \in E_+$ pour ces valeurs de t, on voit que $x(t)$ ne peut pas prendre les valeurs de x telles que $\cos(1/x^2) = y_1$, qui forment une suite infinie qui s'accumule en 0. Comme $x(0) > 0$, $x(t_0) = 0$ et x est continue, ceci contredit le théorème des valeurs intermédiaires. On ne peut donc avoir $\gamma(0) \in E_+, \gamma(1) \in E_0 \cup E_-$.
Le même argument avec x remplacé par $-x$ montre qu'on ne peut avoir $\gamma(0) \in E_-, \gamma(1) \in E_0 \cup E_+$. Ceci termine la preuve.

3. E_-, E_0, E_+ sont connexes par arcs, donc connexes. Il suffit donc de montrer que si $f : E \to \{0,1\}$ est continue alors elle prend la même valeur sur E_-, E_0 et E_+. Montrons qu'elle prend la même valeur sur E_+ et sur E_0 : on considère la suite de terme général $m_k = (1/\sqrt{\pi/2 + 2k\pi}, 0)$, qui est dans E_+ par construction. Comme cette suite converge vers $(0,0) \in E_0$, on doit avoir par continuité de f que $f(0,0) = \lim f(m_k)$ si bien que f prend la même valeur sur E_0 et sur E_+. Le même argument avec x remplacé par $-x$ montre que f prend la même valeur sur E_- et sur E_0, donc E est connexe.

3. Exercice

Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H. Soit V la fermeture du sous-espace engendré par la famille $(e_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in H$, on pose $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$.

1. Le terme général de la série est positif, de plus les sommes partielles sont majorées par $\|x\|^2$ d'après l'inégalité de Parseval. La série est donc convergente.

   Soit $p \leq q \in \mathbb{N}$, alors
   $$\left\| \sum_{p+1}^{q} \alpha_k e_k \right\|^2 = \sum_{p+1}^{q} \alpha_k^2 \ .$$
   D'après la première partie de la question, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, si $q \geq p \geq N$,
   $$\left\| \sum_{p+1}^{q} \alpha_k e_k \right\|^2 \leq \epsilon \ ,$$
   ce qui signifie que la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k)_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Comme H est complet, cette suite converge.
2. Soit $y = \sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n$. Par construction, $y \in V$. De plus, pour tout n, $\langle e_n, y \rangle = \alpha_n = \langle e_n, x \rangle$, donc $y - x$ est orthogonal à e_n. Comme les e_n engendrent V par définition, on en déduit que $y - x$ est orthogonal à V, donc $y = x_V$. La relation $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x_V\|^2$ suit donc de l'égalité de Parseval, et $\|x_V\|^2 \leq \|x\|^2$ puisque x est la somme de x_V et d'un vecteur $x - x_V$ orthogonal à V et donc à x_V.
3. On a $x = x_V + (x - x_V)$, les deux termes étant orthogonaux, si bien que $\|x\|^2 = \|x_V\|^2 + \|(x - x_V)\|^2$, et donc $\|x\|^2 = \|x_V\|^2$ si et seulement si $x - x_V = 0$, donc si et seulement si $x \in V$. Le résultat suit en utilisant la question précédente.

4. Exercice

On note $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficient réels. Pour tout $P \in E$, on note
$$N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \ .$$

1. On note que :
   (a) $N(P) \geq 0$ pour tout $P \in E$, de plus $N(P) = 0$ si et seulement si $P = 0$ puisque si $N(P) = 0$ alors P a une infinité de racines et doit donc être le polynôme nul.
   (b) $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$, par définition de N,
   (c) si $P, Q \in E$, alors, pour tout $t \in [0,1]$,
   $$|(P+Q)(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |Q(t)| \ ,$$
   donc
   $$\sup_{t\in[0,1]} |(P+Q)(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |Q(t)| \ ,$$
   si bien que $N(P+Q) \leq N(P) + N(Q)$, on a donc bien l'inégalité triangulaire.

   Ceci montre que N est une norme sur E.
2. u n'est pas injective, car $u(X) = u(X+1) = 1$. Elle est surjective, car tout polynôme a pour primitive un polynôme. Elle n'est pas continue, en effet, pour tout $n > 0$ on a $u(X^n) = nX^{n-1}$, si bien que $N(X^n) = 1$ mais $N(u(X^n)) = n \to \infty$. Ce n'est pas un homéomorphisme puisqu'elle n'est pas injective.

3. v est injective, car si $XP = XQ$ alors $P = Q$. Elle n'est pas surjective, car le polynôme constant 1 n'a pas d'image réciproque. Elle est continue, car si $P \in E$ alors

$$N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \leq \sup_{t \in [0,1]} |tP(t)| = N(XP) \ .$$

Ce n'est pas un homéomorphisme car elle n'est pas surjective.