L3 MAPES — Topologie
2007-08
Examen de rattrapage, 27 Juin 2008
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Exercice

Soit (u_n) une suite réelle bornée, on définit

$$\limsup u_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} u_k \ ,$$

$$\liminf u_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{k\geq n} u_k \ .$$

1. Montrer que ces deux limites existent.
2. Montrer que si l est une valeur d'adhérence de (u_n), alors
$$\liminf u_n \leq l \leq \limsup u_n \ .$$
3. Comparer $\liminf(u_n + v_n)$ et $\liminf u_n + \liminf v_n$. On pourra montrer qu'il existe une inégalité entre les deux, puis montrer que l'inégalité inverse n'est pas satifsaite en exhibant un contre-exemple.
4. Montrer que si (u_n) est bornée et (v_n) est convergente, alors $\limsup u_n + v_n = \limsup u_n + \lim v_n$.

2. Exercice

On considère l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ constitué de la réunion du graphe de la fonction $x \mapsto \cos(1/x^2)$, $x \neq 0$, et de l'axe $(0y)$. On note E_0 l'axe $(0y)$,

$$E_- = \{(x, \cos(1/x^2) \mid x < 0\} \ , \quad E_+ = \{(x, \cos(1/x^2) \mid x > 0\} \ .$$

1. Montrer que E_-, E_0 et E_+ sont connexes par arcs.
2. Combien de composantes connexes par arcs a E ? On justifiera soigneusement la réponse.
3. Montrer que E est connexe.

3. Exercice

Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormale de H. Soit V la fermeture du sous-espace engendré par la famille $(e_n)_{n\geq 0}$. Pour tout $x \in H$, on pose $\alpha_n = \langle x, e_n\rangle$.

1. Montrer que la série $\sum_n |\alpha_n|^2$ converge dans $\mathbb{R}$. En déduire que la suite $(\sum_{k=0}^n \alpha_k e_k)_{n\geq 0}$ converge dans H.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e_n = x_V$ où x_V est la projection de x sur V. En déduire que $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x_V\|^2 \leq \|x\|^2$.
3. Montrer que $x \in H$ appartient à V si et seulement si $\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$.

4. Exercice

On note $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficient réels. Pour tout $P \in E$, on note

$$N(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \ .$$

1. Montrer que N définit une norme sur E.
2. On note $u : E \to E$ l'application qui à P associe P'. u est-elle injective ? Surjective ? Continue ? Est-ce un homéomorphisme ?
3. Même questions pour l'application $v : E \to E$ qui à P associe XP.