L3 MAPES — Topologie
2007-08
Examen partiel, 30 octobre 2007
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Question de cours

Soient (E,d) et (F,δ) deux espaces métriques, soit $f : E \to F$. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E convergeant vers une limite x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$. Montrer que f est continue.

2. Exercice

Soit $a,b \in \mathbf{R}$, et soir $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = a, \lim_{+\infty} f = b$. On considère la fonction $g :] - \pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(\tan(x))$.

1. Rappeler pourquoi g est une fonction continue sur $] - \pi/2, \pi/2[$. Que peut-on dire de la limite de g en $-\pi/2$ et en $\pi/2$?
2. Montrer que g peut se prolonger en une fonction continue de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $\mathbf{R}$.
3. Montrer que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Est-ce que f atteint nécessairement ses bornes ?

3. Exercice

Soit (E,d) un espace métrique. Pour tout $F \subset E$ non vide, on note d_F la fonction de E dans $\mathbf{R}$ définie par

$$d_F(x) = \inf_{y\in F} d(x,y) \ .$$

1. Montrer que quel que soit F non vide, d_F est continue.
2. Montrer que quel que soit F non vide, $adh(F) = d_F^{-1}(0)$.
3. On considère un compact K et un fermé F de (E,d) tels que $K \cap F = \emptyset$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in K$ et $y \in F$, $d(x,y) \geq \epsilon$. *Indication : on pourra considérer la restriction à K de la fonction d_F.*
4. Montrer que ce résultat est faux si on suppose seulement que K est fermé. (On pourra chercher un contre-exemple dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{R}^2$.)

4. Problème

Soit (E,d) un espace métrique compact, on note $C(E)$ l'espace des fonctions continues de E dans $\mathbf{R}$. Pour $f,g \in C(E)$ on pose :

$$D(f,g) = \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)| \ .$$

1. Montrer que $D(f,g)$ est bien définie quelle que soit $f,g \in C(E)$.
2. Montrer que D définit une distance sur $C(E)$.
3. Pour tout $a \in E$ on appelle d_a la fonction de E dans $\mathbf{R}$ définie par $d_a(x) = d(a,x)$. Montrer que l'application qui a a associe d_a est une isométrie de (E,d) dans $(C(E),D)$.
4. Montrer que $(C(E),D)$ est complet.
5. Montrer que $(C(E),D)$ est connexe par arcs.
6. Est-ce que $(C(E),D)$ est compact ?

L3 MAPES — Topologie
2007-08
Corrigé abrégé du partiel du 30 octobre 2007

1. Question de cours

Voir le cours.

2. Exercice

1. tan est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et f est continue sur $\mathbf{R}$, g est donc continue puisque c'est la composée de deux fonctions continues.

$\lim_{-\pi/2} \tan = -\infty$ et $\lim_{-\infty} f = a$, si bien que $\lim_{-\pi/2} g = a$. De même, $\lim_{\pi/2} \tan = \infty$ et $\lim_{\infty} f = b$ si bien que $\lim_{\pi/2} g = b$.

2. Comme g est continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et admet pour limites a en $-\pi/2$ et b en $\pi/2$, on peut la prolonger en une fonction continue sur $[-\pi/2, \pi/2]$ en posant $g(-\pi/2) = a$, $g(\pi/2) = b$. On appelle encore g la fonction ainsi définie.

3. g est continue sur $[_\pi/2, \pi/2]$ qui est compact. Elle est donc bornée, si bien que f est bornée sur $\mathbf{R}$. Mais f n'atteint pas nécessairement ses bornes, f atteint son sup si et seulement si g atteint son maximum sur $]-\pi/2, \pi/2[$ (et non pas en $-\pi/2$ ou en $\pi/2$) et de même pour la borne inférieure.

3. Exercice

1. Soit $\epsilon > 0$. Soit $x, x' \in E$ tels que $d(x, x') \leq \epsilon/2$. Par définition de d_F, il existe $y, y' \in F$ tels que :

$$d_F(x) \leq d(x, y) \leq d_F(x) + \epsilon/2 \ ,$$

$$d_F(x') \leq d(x', y') \leq d_F(x') + \epsilon/2 \ .$$

Mais, toujours pas définition de $d_F(x)$, on a aussi

$$d_F(x') \leq d(x', y) \ .$$

En utilisant les deux inégalités on obtient que

$$d_F(x') - d_F(x) \leq d(x', y) - d(x, y) + \epsilon/2 \ ,$$

et donc, avec l'inégalité triangulaire,

$$d_F(x') - d_F(x) \leq d(x, x') + \epsilon/2 \leq \epsilon \ .$$

On peut reprendre ce raisonnement en échangeant x et x', on obtient que

$$|d_F(x') - d_F(x)| \leq \epsilon \ ,$$

si bien que d_F est continue. (On a en fait montré que d_F est 2-Lipschitz ; on aurait pu montrer, au prix d'une démonstration un petit peu plus élaborée, que d_F est 1-Lipschitz.)

2. Comme d_F est continue et $\{0\}$ est fermé, $d_F^{-1}(0)$ est un fermé. De plus il contient F car d_F s'annule sur F par définition. Comme $adh(F)$ est le plus petit fermé contenant F, $d_F^{-1}(0) \subset adh(F)$.

Soit $x \in adh(F)$, alors x est la limite d'une suite (x_n) de points de F. Comme d_F est continue, $d_F(x) = \lim_\infty d_F(x_n)$. Mais pour tout $n \in \mathbf{N}, d_F(x_n) = 0$, si bien que $d_F(x) = 0$, et donc $x \in d_F^{-1}(0)$. Donc $d_F^{-1}(0) = adh(F)$.

3. Soit d'_F la restriction de d_F à K. d'_F est continue, puisque restriction d'une fonction continue. Comme K est compact, d'_F y atteint sa borne inférieure, en un point qu'on appellera x_0.

Supposons que $d'_F(x_0) = 0$, alors $d_F(x_0) = 0$ si bien que, d'après la question précédente, $x_0 \in adh(F)$. Mais F est fermé et donc $x_0 \in F$, ce qui est impossible car F et K sont disjoint. Donc $d'_F(x_0) > 0$, et donc $\min_K d_F > 0$, d'où le résultat.

4. On peut par exemple se placer dans $\mathbf{R}^2$ et prendre pour K l'axe Ox et pour F le graphe de la fonction $x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbf{R}$ privé de 0. Ces deux ensembles sont clairement disjoints, et sont fermés car images réciproques de fermés par les fonctions $(x, y) \mapsto y$ et $(x, y) \mapsto y - 1/x$, la seconde définie pour $x \neq 0$. De plus il est clair qu'il existe des points de F arbitrairement proches de K (on laisse la vérification de ce point au lecteur).

4. Problème

Soit (E,d) un espace métrique compact, on note $C(E)$ l'espace des fonctions continues de E dans $\mathbf{R}$. Pour $f,g \in C(E)$ on pose :
$$D(f,g) = \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)| \ .$$

1. Comme f et g sont continue et que (E,d) est compact, elles sont bornées. Leur différence est donc aussi bornée, si bien que la borne supérieure de la valeur absolue existe.

2. On vérifie les trois points de la définition.

1. Séparation. Pour tout $f \in C(E)$, $D(f,f) = 0$ par définition. De plus, si $f,g \in C(E)$ sont telles que $D(f,g) = 0$, alors $\sup_{x\in E} |f(x) - g - x)| = 0$, et donc $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in E$. Donc $f = g$.
2. Symétrie. Pour tout $f,g \in C(E)$ il est clair que
$$D(f,g) = \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)| = \sup_{x\in E} |g(x) - f(x)| = D(g,f) \ .$$
3. Identité triangulaire. Soit $f,g,h \in C(E)$, soit $x \in E$. Alors
$$|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \leq D(f,g) + D(g,h)$$
et, en prenant le sup sur x, on voit que $D(f,h) \leq D - f,g) + D(g,h)$.

D est donc une distance sur $C(E)$.

3. On a déjà vu dans la question 1 de l'exercice 3 que d_a est continue, il suffit en effet de prendre $F = \{a\}$. Soit $a,b \in E$, et soit $x \in E$. On a
$$|d_a(x) - d_b(x)| = |d(a,x) - d_(b,x)| \leq d(a,b) \ .$$
Mais $|d_a(a) - d_b(a)| = |0 - d(a,b)| = d(a,b)$, si bien que $D(d_a, d_b) = d(a,b)$, et l'application $a \mapsto d_a$ est donc une isométrie de (E,d) dans $(C(E), D)$.

4. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans $(C(E), D)$. On vérifie facilement que, pour tout $x \in E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy dans $\mathbf{R}$ (on laisse la vérification au lecteur) si bien qu'elle converge vers une limite $f(x)$. Ceci définit une fonction $f : E \to \mathbf{R}$.

Soit $\epsilon > 0$. Comme (f_n) est de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $p,q \geq N$, $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \epsilon$. En faisant tendre q vers l'infini on voit que :
$$\forall x \in E, \forall p \geq N, |f_p(x) - f(x)| \leq \epsilon \ ,$$
si bien que (f_n) converge uniformément vers f. Ainsi f est continue, donc $f \in C(E)$, et (f_n) converge vers f pour D. Donc $(C(E), D)$ est complet.

5. Soit $f,g \in C(E)$. On définit une application $F : [0,1] \to C(E)$ en posant pour tout $t \in [0,1]$ et tout $x \in E$:
$$F(t)(x) = (1-t)f(x) + tg(x) \ .$$
Clairement $F(0) = f$ et $F(1) = g$. De plus pour tout $t \in [0,1]$, $F(t)$ est une fonction continue (comme combinaison linéaire de fonctions continues). Donc $C(E)$ est connexe par arcs.

6. Non, on peut par exemple considérer la suite (f_n) d'éléments de $C(E)$ définie par $f_n(x) = n$ pour tout $x \in E$. Il est facile de vérifier (on laisse encore les détails au lecteur) que (f_n) n'admet aucune sous-suite convergente.