L3 MAPES — Topologie
2007-08
Examen partiel, 30 octobre 2007
On attachera la plus grande importance à la correction et à la rigueur de la rédaction !
Chaque réponse devra être soigneusement argumentée.

1. Question de cours

Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, soit $f : E \to F$. On suppose que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E convergeant vers une limite x, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$. Montrer que f est continue.

2. Exercice

Soit $a, b \in \mathbf{R}$, et soir $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = a, \lim_{+\infty} f = b$. On considère la fonction $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbf{R}$ définie par $g(x) = f(\tan(x))$.

1. Rappeler pourquoi g est une fonction continue sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Que peut-on dire de la limite de g en $-\pi/2$ et en $\pi/2$?
2. Montrer que g peut se prolonger en une fonction continue de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $\mathbf{R}$.
3. Montrer que f est bornée sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Est-ce que f atteint nécessairement ses bornes ?

3. Exercice

Soit (E, d) un espace métrique. Pour tout $F \subset E$ non vide, on note d_F la fonction de E dans $\mathbf{R}$ définie par

$$d_F(x) = \inf_{y\in F} d(x, y) \ .$$

1. Montrer que quel que soit F non vide, d_F est continue.
2. Montrer que quel que soit F non vide, $adh(F) = f^{-1}(0)$.
3. On considère un compact K et un fermé F de (E, d) tels que $K \cap F = \emptyset$. Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in K$ et $y \in F$, $d(x, y) \geq \epsilon$. *Indication : on pourra considérer la restriction à K de la fonction d_F.*
4. Montrer que ce résultat est faux si on suppose seulement que K est fermé. (On pourra chercher un contre-exemple dans $\mathbf{R}$ ou dans $\mathbf{R}^2$.)

4. Problème

Soit (E, d) un espace métrique compact, on note $C(E)$ l'espace des fonctions continues de E dans $\mathbf{R}$. Pour $f, g \in C(E)$ on pose :

$$D(f, g) = \sup_{x\in E} |f(x) - g(x)| \ .$$

1. Montrer que $D(f, g)$ est bien définie quelle que soit $f, g \in C(E)$.
2. Montrer que D définit une distance sur $C(E)$.
3. Pour tout $a \in E$ on appelle d_a la fonction de E dans $\mathbf{R}$ définie par $d_a(x) = d(a, x)$. Montrer que l'application qui a a associe d_a est une isométrie de (E, d) dans $(C(E), D)$.
4. Montrer que $(C(E), D)$ est complet.
5. Montrer que $(C(E), D)$ est connexe par arcs.
6. Est-ce que $(C(E), D)$ est compact ?