

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE
IM WS 2001/2002

Blatt 11

11. Januar 2002

1. Zwei Unternehmer wollen sich zwischen 20:00 und 21:00 Uhr an einem bestimmten Ort treffen. Die beiden kommen dabei innerhalb der angegebenen Stunde rein willkürlich und unabhängig voneinander an. Keiner der beiden ist jedoch bereit, länger als 10 Minuten auf den anderen zu warten.
 - (i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit kommt es zu einem Treffen?
 - (ii) Wie lang müßten beide bereit sein, aufeinander zu warten, damit die Wahrscheinlichkeit, sich zu treffen, mindestens 70% beträgt?
2. Hans kauft zwei neue Glühlampen: eine 60 Watt und eine 100 Watt Birne. Laut Angaben des Herstellers ist die Lebensdauer der 60 Watt Birne exponentialverteilt mit einer durchschnittlichen Lebensdauer von 200 Stunden ($\alpha = 1/200$). Die Lebensdauer der 100 Watt Birne ist exponentialverteilt mit einer durchschnittlichen Lebensdauer von 100 Stunden ($\alpha = 1/100$). Hans fragt sich, mit welcher Wahrscheinlichkeit die 100 Watt Birne länger halten wird als die 60 Watt Birne.

Anleitung: Sind X und Y unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariable mit den Dichten $f_X(t) = \alpha e^{-\alpha t}$ und $f_Y(t) = \beta e^{-\beta t}$ für $t \geq 0$, so gilt

$$P(X < Y) = \int_0^\infty f_X(t)(1 - F_Y(t)) dt$$

mit F_Y der Verteilungsfunktion von Y . Verifizieren Sie diese Formel und leiten Sie daraus ab, dass

$$P(X < Y) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

3. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) sei eine nichtnegative Zufallsvariable T gegeben, die wir als “zufällige Lebenszeit” eines Objekts interpretieren. Die Verteilung von T sei absolutstetig mit Verteilungsfunktion F und Dichtefunktion f .

Wir betrachten die folgenden Größen:

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) &:= 1 - F(t) = P(T > t) && \text{survival function,} \\ H(t) &:= -\log \bar{F}(t) && \text{hazard function,} \\ r(t) &:= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{d}{dt} H(t) && \text{hazard rate oder Ausfallrate.} \end{aligned}$$

Bitte wenden

- (a) Rekonstruieren Sie die Verteilungsfunktion aus der Ausfallsrate.
(b) Zeigen Sie

$$\frac{P(T \leq t + h \mid T > t)}{h} \longrightarrow r(t) \quad \text{für } h \searrow 0.$$

4. Berechnen Sie die in Aufgabe 3. definierten Größen

(i) für die *Exponentialverteilung*, und

(ii) für die durch

$$F(t) = 1 - \exp(-\alpha t^\beta), \quad t \geq 0,$$

definierte *Weibull-Verteilung* mit Parametern $\alpha, \beta > 0$.