

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG  
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE  
IM WS 2001/2002

Blatt 12

18. Januar 2002

---

1. Sei  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie:

(i) Ist  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine identisch verteilte Folge von Zufallsvariablen, so gilt

$$E|X_1| < \infty \implies P(|X_n| \leq n \text{ schließlich}) = 1.$$

(ii) Ist  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen, so gilt

$$E|X_1| < \infty \iff P(|X_n| > n \text{ immer wieder}) = 0.$$

*Hinweis:* Leiten Sie zunächst für eine beliebige Zufallsvariable  $X$  aus der Formel  $E|X| = \int_0^\infty P(|X| > t) dt$  ab, dass

$$\sum_{n \geq 1} P(|X| > n) \leq E|X| \leq \sum_{n \geq 0} P(|X| > n).$$

2. Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine i.i.d. Folge von Zufallsvariablen auf  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Man zeige:  
Sind die  $X_n$  exponentialverteilt zum Parameter  $\alpha = 1$ , so gilt

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1.$$

*Hinweis:* Verifizieren Sie zunächst

$$P(X_n > c \log n \text{ immer wieder}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } c > 1, \\ 1 & \text{falls } c \leq 1. \end{cases}$$

3. Seien  $\mu, \tilde{\mu}$  absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf  $\mathbb{R}$  mit Dichtefunktionen  $f$  und  $\tilde{f}$ . Dann heißt

$$H(\mu) := - \int f(x) \log f(x) dx, \quad \text{bzw.} \quad H(\tilde{\mu}|\mu) := \int \tilde{f}(x) \log \frac{\tilde{f}(x)}{f(x)} dx,$$

die *Entropie* von  $\mu$ , bzw. die *relative Entropie* von  $\tilde{\mu}$  bezüglich  $\mu$ .

(i) Ist  $\mu$  die Gleichverteilung auf  $[a, b]$ , so gilt

$$H(\tilde{\mu}|\mu) = \log(b - a) - H(\tilde{\mu})$$

für jedes  $\tilde{\mu}$ , welches auf  $[a, b]$  konzentriert ist (d.h.  $\tilde{f} = 0$  auf  $\mathbb{C}[a, b]$ ).

Bitte wenden

(ii) Ist  $\mu$  die Exponentialverteilung mit Parameter  $\alpha$ , so gilt

$$H(\tilde{\mu}|\mu) = 1 - \log(\alpha) - H(\tilde{\mu})$$

für jedes auf  $[0, \infty)$  konzentrierte  $\tilde{\mu}$  mit Erwartungswert  $1/\alpha$ .

(iii) Ist  $\mu$  die Normalverteilung  $N(m, \sigma^2)$ , so gilt

$$H(\tilde{\mu}|\mu) = \log(\sqrt{2\pi\sigma^2}e) - H(\tilde{\mu})$$

für jedes  $\tilde{\mu}$  mit Erwartungswert  $m$  und Varianz  $\sigma^2$ .

4. Leiten Sie aus Aufgabe 3 die folgenden Aussagen ab:

- (a) Unter allen absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\tilde{\mu}$  auf  $[a, b]$  hat die Gleichverteilung maximale Entropie.
- (b) Unter allen absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\tilde{\mu}$  auf  $[0, \infty)$  mit festem Erwartungswert  $1/\alpha$  hat die Exponentialverteilung mit Parameter  $\alpha$  maximale Entropie.
- (c) Unter allen absolutstetigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\tilde{\mu}$  auf  $\mathbb{R}$  mit festem Erwartungswert  $m$  und fester Varianz  $\sigma^2$  hat die Normalverteilung  $N(m, \sigma^2)$  maximale Entropie.

*Hinweis:* Zeigen Sie analog zum diskreten Fall:  $0 \leq H(\tilde{\mu}|\mu) \leq \infty$ ,  
wobei  $H(\tilde{\mu}|\mu) = 0 \iff \tilde{\mu} = \mu$ .