

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE
IM WS 2001/2002

Blatt 13

25. Januar 2002

1. Sei X eine nicht-negative Zufallsvariable mit stetiger Dichtefunktion.
Dann ist X *gedächtnislos*, d.h.

$$P(X \geq s + t \mid X \geq t) = P(X \geq s), \quad \forall s, t \geq 0,$$

genau dann wenn X exponentialverteilt ist.

Hinweis: Ist $F: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $F(s + t) = F(s)F(t)$ für $s, t \geq 0$ und ist F nicht die Nullfunktion, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $F(t) = e^{\lambda t}$ für alle $t \geq 0$. Wenden Sie dies an auf $F(x) := \int_x^\infty f(t) dt$ mit f der Dichtefunktion zu X .

2. a) Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und exponentialverteilt zu den Parametern $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Dann ist $X := \min\{X_1, \dots, X_n\}$ ebenfalls exponentialverteilt, und zwar zum Parameter $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

b) Sie stehen mit Ihrem Auto vor einem besetzten Parkplatz mit 50 Plätzen, auf dem die Autos im Schnitt eine Stunde abgestellt werden. Sie sollen sich nun entscheiden: Warten Sie auf einen freiwerdenden Platz oder fahren Sie weiter zum nächsten Parkplatz, der zwar garantiert freie Plätze hat, aber 10 Minuten weiter von Ihrem Ziel entfernt ist.

3. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig und exponentialverteilt zum gleichen Parameter α . Dann besitzt $X := \max\{X_1, \dots, X_n\}$ die Dichtefunktion

$$g(x) = n\alpha e^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha x})^{n-1}, \quad x \geq 0.$$

Das Maximum ist für $n > 1$ also nicht wieder exponentialverteilt.

4. a) In der Situation von Aufgabe 3 verifiziere man

$$E[X] = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Hinweis: Das Integral $\int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\alpha x})^n] dx$ läßt sich durch die Substitution $u := 1 - e^{-\alpha x}$ auswerten. Benutzen Sie dann die Formel $\frac{1-u^n}{1-u} = 1 + u + \dots + u^{n-1}$.

b) Ein Sportlehrer wartet darauf, dass sich 30 Schüler umziehen. Die Umkleidezeiten seien unabhängig und exponentialverteilt mit Erwartungswert jeweils 5 Minuten. Schätzen Sie in etwa ab, nach wieviel Minuten der Lehrer im Durchschnitt mit dem Unterricht wird beginnen können. (Es gilt näherungsweise $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \approx \ln n$).

Abgabe: Freitag, 1. Februar in der Vorlesung

Internet: <http://homepages.uni-regensburg.de/~tha03502/LEHRE/ws01-02.html>