

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE
IM WS 2001/2002

Blatt 5

16. November 2001

1. Ein Buch mit 400 Seiten enthält etwa 400 Druckfehler, die zufällig verteilt sind. Wie groß ist (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass auf den ersten beiden Seiten je genau ein Druckfehler vorkommt?
2. In einer Urne befinden sich n gleichartige Kugeln, die von 1 bis n numeriert sind. Es werden nacheinander zufällig zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Es bezeichne X die Nummer der ersten gezogenen Kugel und Y die Nummer der zweiten Kugel.
 - a) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X und Y nicht unabhängig sind.
 - b) Berechnen Sie die Kovarianz $\text{cov}(X, Y)$.
Warum ist das negative Vorzeichen zu erwarten?
 - c) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$ und den Limes dieser Größe bei $n \rightarrow \infty$.
3. Eine Zufallsvariable Y heißt fast sicher konstant, wenn es eine Konstante c gibt, so dass $P(Y = c) = 1$ gilt. Zeigen Sie:
 - a) Ist X eine Zufallsvariable und $g: X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Transformation, dann sind X und $g(X)$ genau dann unabhängig, wenn $g(X)$ fast sicher konstant ist.
 - b) Sind X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariable, so ist bereits jedes X_i fast sicher konstant, wenn $X_1 + \dots + X_n$ fast sicher konstant ist.
 - c) Sei X eine Zufallsvariable, welche die Werte $0, \pi/2$ und π jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ annimmt. Zeigen Sie, dann sind $X_1 = \sin(X)$ und $X_2 = \cos(X)$ unkorreliert, aber nicht unabhängig.
4. Es seien $X_1, X_2 : \Omega \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ unabhängige Zufallsvariable mit

$$P(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n) = \binom{n}{k} 2^{-n}$$

für alle k, n mit $0 \leq k \leq n$. Dann sind X_1 und X_2 Poisson-verteilt mit gleichem λ .

Abgabe: Freitag, 23. November in der Vorlesung

Internet: <http://www.physik.uni-regensburg.de/~tha03502/LEHRE/ws01-02.html>