

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE
IM WS 2001/2002

Blatt 6

23. November 2001

1. Während des 2. Weltkriegs wurde das folgende Bluttest-Schema entwickelt, um bei möglichst geringem Aufwand kranke Personen aus einer großen Zahl $N \gg 1$ von Soldaten herauszufinden. Anstatt jede Person einzeln zu testen (N Tests) werden die Blutproben von je k Personen zusammengeschüttet und untersucht. Ist das Ergebnis der “gepoolten” Probe dann negativ, so sind k Personen mit einem einzigen Test als gesund identifiziert. Ist es aber positiv, muss jede der k Personen dieser Gruppe einzeln getestet werden (insgesamt $k+1$ Tests). Man nimmt an, dass eine Person mit einer Wahrscheinlichkeit $p \ll 1$ krank ist und dass die Untersuchten unabhängig voneinander krank bzw. gesund sind.

- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine gepoolte Stichprobe von k Personen positiv ist, und berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl benötigter Tests als Funktion von N , k und p (dabei nehmen wir an, dass N durch k teilbar ist).
- Zeigen Sie, dass der Wert für k , der die zu erwartende Anzahl von Tests minimiert, ungefähr bei $1/\sqrt{p}$ liegt.

2. Es bezeichne S_n die Anzahl der “Kopfwürfe” bei n -maligem unabhängigen Werfen einer fairen Münze. Berechnen Sie obere Schranken für die Wahrscheinlichkeit

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{10}\right)$$

im Fall $n = 1000$ gemäß

- Tschebychev-Ungleichung
 - Hoeffding-Ungleichung
 - Satz über große Abweichungen (Cramér-Transformierte).
3. (Die Überlagerung unabhängiger Poisson-verteilter ZV ist wieder Poisson-verteilt)
Seien X_1, X_2 unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λ_1 bzw. λ_2 , also

$$P(X_i = k) = e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (i = 1, 2).$$

Dann gilt:

- $X = X_1 + X_2$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.
 - Die bedingte Verteilung $P(X_1 = k | X = n)$ von X_1 bezüglich des Ereignisses $\{X = n\}$ ist die Binomialverteilung mit Parametern $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ und n .
4. (Geometrisches Mittel \leq Arithmetisches Mittel)

Zeigen Sie durch Anwendung der Jensenschen Ungleichung auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, dass für $y_1, \dots, y_n > 0$ und $\mu_1, \dots, \mu_n \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ stets gilt:

$$y_1^{\mu_1} \cdot \dots \cdot y_n^{\mu_n} \leq \mu_1 y_1 + \dots + \mu_n y_n.$$

Abgabe: Freitag, 30. November in der Vorlesung

Internet: <http://www.physik.uni-regensburg.de/~tha03502/LEHRE/ws01-02.html>