

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE
IM WS 2001/2002

Blatt 7

30. November 2001

1. In der Mensa gibt es Schinkennudeln. Wieviele Schinkenstückchen müssen durchschnittlich in einer Portion sein, damit höchstens eine Portion von 100 ohne Schinken ist?
2. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien X_1, \dots, X_n unabhängige Zufallsvariable mit

$$P(X_i = \sqrt{i}) = P(X_i = -\sqrt{i}) = \frac{1}{2^{i+1}} \quad \text{und} \quad P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{2^i}.$$

Man prüfe, ob $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt.

3. Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $\Omega = \{1, 2, \dots\}$. Unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen \tilde{P} auf Ω mit festem Erwartungswert $m = \sum_{n \in \mathbb{N}} n \tilde{P}(\{n\}) \in [1, \infty)$ hat die geometrische Verteilung P mit Parameter $p = 1/m$ maximale Entropie.

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst für jedes \tilde{P} mit Erwartungswert m die Beziehung $H(\tilde{P}|P) = H(P) - H(\tilde{P})$.)

b) Sei $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \mid \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, N\}$ und $S_N(\omega) = \sum_{i=1}^N \omega_i$.

Unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen \tilde{P} auf Ω mit festem Erwartungswert $m = E[S_N]$ hat die Verteilung P mit $P(\{\omega\}) = p^{S_N(\omega)}(1-p)^{N-S_N(\omega)}$ und $p = m/N$ maximale Entropie.

(Beachte: P beschreibt die N -malige unabhängige Wiederholung eines 0/1-Experiments mit Erfolgsparameter p .)

4. Von D. Bernoulli stammt der Vorschlag im Petersburger Paradox statt dem zu erwartenden Gewinn $E[G]$ (bekanntlich gleich $+\infty$) den zu erwartenden Nutzen $E[u(G)]$ mit u einer konkaven "Nutzenfunktion" zu betrachten. Ein Eintrittspreis c heisst dann *akzeptabel*, wenn $u(c) \leq E[u(G)]$ gilt. Bestimmen Sie für die Nutzenfunktion $u(x) = \sqrt{x}$ die akzeptablen Eintrittspreise.

Abgabe: Freitag, 7. Dezember in der Vorlesung

Internet: <http://www.physik.uni-regensburg.de/~tha03502/LEHRE/ws01-02.html>