

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG  
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE  
IM WS 2001/2002

Blatt 8

7. Dezember 2001

---

1. Eine faire Münze wird  $N$ -mal geworfen. Es sei  $G$  der Gewinn bei folgendem Spiel:  
Wir setzen den Betrag  $C$  auf "Kopf" und verdoppeln sukzessive den Einsatz, solange bis erstmals "Kopf" auftritt. Spätestens nach dem  $N$ -ten Wurf bricht das Spiel ab.  
Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von  $G$ .
2. Es werden  $0.28 \cdot 10^{23}$  Moleküle eines Gases (d.h. so viele wie die durch das Molvolumen dividierte Loschmidtsche Zahl angibt) auf zwei Gefäße verteilt, so dass jedes Molekül unabhängig von den anderen mit gleicher Wahrscheinlichkeit in das eine oder das andere Gefäß gelangt. Schätzen Sie mit der Tschebychev'schen Ungleichung die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass in einem der beiden Gefäße mehr als  $0.14 \cdot 10^{23} \cdot (1 + 10^{-8})$  Moleküle landen.
3. Es sei  $S_n$  die Position zur Zeit  $n$  in unserem Modell des symmetrischen Random Walks. Zeigen Sie:

$$P(S_{2n} = 0) = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = P(S_1 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0).$$

*Hinweis:*  $P(S_1 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = 2 P(S_1 > 0, \dots, S_{2n} > 0)$ .

4. Es sei  $P$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $\Omega$  und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine Zufallsvariable mit  $Z(\lambda) := E[e^{\lambda X}] < \infty$  für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Zeigen Sie:
  - a) Für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist durch die Gewichte  $p_\lambda(\omega) = Z(\lambda)^{-1} e^{\lambda X(\omega)} p(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P_\lambda$  auf  $\Omega$  festgelegt. (Man nennt  $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  die zu  $X$  und  $P$  gehörende *exponentielle Familie*).
  - b) Für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist
$$H(\tilde{P}|P) - \lambda \tilde{E}[X] \geq -\log Z(\lambda)$$
für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\tilde{P}$  auf  $\Omega$ , und das Minimum  $-\log Z(\lambda)$  wird angenommen für  $\tilde{P} = P_\lambda$ .
  - c) Unter allen Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $\tilde{P}$  auf  $\Omega$  mit festem Erwartungswert  $\tilde{E}[X] = E_\lambda[X]$  ist  $P_\lambda$  diejenige mit minimaler relativer Entropie bzgl.  $P$ .

---

Abgabe: Freitag, 14. Dezember in der Vorlesung

Internet: <http://homepages.uni-regensburg.de/~tha03502/LEHRE/ws01-02.html>

Bitte beachten Sie die geänderte Adresse!