

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG
STOCHASTIK FÜR INFORMATIK- UND LEHRAMTSSTUDIERENDE
IM WS 2001/2002

Blatt 9

14. Dezember 2001

In dieser Serie bezeichnet $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ unser Modell des symmetrischen Random Walks auf \mathbb{Z} .

1. Für natürliche Zahlen $r, n \in \mathbb{N}$ mit $r \leq n$ und $n+r$ gerade gilt

$$P(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-1} \neq 0 \mid S_n = r) = \frac{r}{n}.$$

Hinweis: Die Aussage wird gelegentlich *Ballot Theorem* genannt. Der Bezeichnung liegt folgende Interpretation zugrunde: Man betrachtet eine Wahlauszählung mit 2 Kandidaten und n abgegebenen Stimmen, wobei Kandidat A ein Plus von r Stimmen gegenüber Kandidat B erhalten hat. Man interessiert sich für die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidat A während der Auszählung der Stimmzettel stets in Führung liegt.

2. Für $a > 0$ bezeichne $T_a^N := \min\{n > 0 \mid S_n = a\} \wedge N$.

- a) Man berechne $E[S_N \cdot 1_{\{T_a^N = N\}}]$ und zeige, dass der Ausdruck für $N \rightarrow \infty$ gegen $-a$ konvergiert.

Hinweis: Stopformel und Reflektionsprinzip aus der Vorlesung.

- b) Zeigen Sie, dass die bedingte Erwartung

$$E[S_N \mid T_a^N = N] := \frac{E[S_N \cdot 1_{\{T_a^N = N\}}]}{P(T_a^N = N)}$$

für $N \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ konvergiert.

3. (*Bad news is better than no news*) Kenntnis des Spielendstandes $S_N = a$ erlaubt i.a. sehr wohl Stopzeiten mit positiver Gewinnerwartung zu konstruieren, und zwar unter Umständen sogar im Fall $a < 0$.

Konstruieren Sie für $N = 5$ eine Stopzeit T mit der Eigenschaft $E[S_T \mid S_N = -1] > 0$.

4. Man zeige: Im Gegensatz zu $E[X_1] = 0$ gilt für die bedingte Erwartung

$$E[X_1 \mid S_n = r] = \frac{r}{n}, \quad r = 0, \dots, n.$$

Abgabe: Freitag, 21. Dezember in der Vorlesung

Internet: <http://homepages.uni-regensburg.de/~tha03502/LEHRE/ws01-02.html>

Bitte beachten Sie die geänderte Adresse!