DEUG MASS 2
Mathématiques

Devoir à rendre le 9 Janvier 2003

E désigne un espace euclidien de dimension finie.

1. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme de E. Montrer :

   (a) $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$; (b) $\mathrm{Im}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.

2. Soit $f \in \mathrm{End}(E)$. On note $\mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs propres réelles de f.

   Montrer les implications suivantes :

   (a) $f^2 = \mathrm{id} \implies \mathrm{Sp}(f) \subset \{\pm 1\}$;
   (b) $f^2 = f \implies \mathrm{Sp}(f) \subset \{0, 1\}$;
   (c) $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m = 0$ (c.à.d. f est *nilpotent*) $\implies \mathrm{Sp}(f) = \{0\}$;
   (d) $f^* \circ f = \mathrm{id}$ (c.à.d. f est une *isométrie*) $\implies \mathrm{Sp}(f) \subset \{\pm 1\}$;
   (e) $f^* = -f$ (c.à.d. f est *anti-symétrique*) $\implies \mathrm{Sp}(f) \subset \{0\}$;
   (f) $\exists g \in \mathrm{End}(E)$ tel que $f = g^* \circ g \implies \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$;
   (g) $\exists g \in \mathrm{End}(E)$ inversible tel que $f = g^* \circ g \implies \mathrm{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

3. Soit $0 \neq x \in E$. Soit $\tau_x \colon E \to E$ l'application linéaire définie par

$$\tau_x(y) = y - 2\,\frac{(x, y)}{(x, x)}\,x.$$

   (a) Montrer que $\tau_x(x) = -x$ et que $\tau_x | F = \mathrm{id}_F$, où $F = \{x\}^\perp$.
   (b) Montrer que τ_x est une isométrie.
   (c) Montrer que $\tau_x \circ \tau_x = \mathrm{id}$.
   (d) Montrer que $\det(\tau_x) = -1$.

   L'application τ_x est appelée *réflexion orthogonale par rapport à l'hyperplan* F.

4. Soit f une isométrie de E. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents :

   (a) $f \circ f = -\mathrm{id}_E$;
   (b) $\forall\, x \in E,\ f(x) \perp x$;
   (c) $\forall\, x, y \in E,\ (f(x), y) = -(x, f(y))$;
   (d) f est anti-symétrique.

5. Soit $f \colon E \to E$ une application non nécessairement linéaire.

   (a) On suppose que f conserve le produit scalaire, c.à.d. $\forall\, x, y \in E$, $(f(x), f(y)) = (x, y)$. Montrer que f est linéaire.

   (b) On suppose que f conserve les distances, c.à.d. $\forall\, x, y \in E$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. Montrer que $g = f - f(0)$ est une isométrie de E.