DEUG MASS 2
Mathématiques

Jeudi 21 novembre 2002, 9:45 – 13:00

Les seuls documents autorisés sont les résumés de cours.
Toutes les réponses doivent être justifiées.

---

1. Soit $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par
$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+2x_2+x_3,\ x_1+3x_2+x_3+x_4,\ x_1+x_2-x_3+x_4).$$
   a) Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
   b) Déterminer les dimensions et des bases de Ker$f$ et Imf.

2. Décider lesquelles des matrices suivantes sont diagonalisables :
$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & -2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est
$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$
   (a) Calculer le polynôme caractéristique de f.
   (b) En déduire une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
   (c) Trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

4. Soient $x_1,\ldots,x_5$ des nombres réels. Calculer le déterminant de la matrice A suivante :
$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & x_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & x_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & x_4 & 1 & 0\\ 0 & 0 & x_5 & 0 & 1\end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}).$$
   Pour quelles valeurs des nombres $x_1,\ldots,x_5$ la matrice A est-elle inversible ?

5. (a) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier positif ℓ tel que $A^\ell = 0$. Montrer que $\det A = 0$.
   (b) Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. On suppose que A est *anti-symétrique*, c.a.d. que l'on a ${}^tA = -A$. Montrer que $\det A = 0$.

6. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ et soit $C_A(X) = -X^3 + X$ son polynôme caractéristique.
   (a) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (b) Montrer que $A^{2003} = A$.