DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 1 — 2002-2003

---

1. Pour tout nombre réel ϑ, on pose $A(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$.
   i) Montrer que l'on a $A(\vartheta)A(\varphi) = A(\vartheta + \varphi)$ pour $\vartheta, \varphi \in \mathbb{R}$.
   ii) En déduire que la matrice $A(\vartheta)$ est inversible et calculer son inverse.

2. Soit $A \in M_n(\mathbf{K})$ une matrice telle qu'il existe un entier positif ℓ pour lequel on ait $A^\ell = 0$.
   i) Montrer que A n'est pas inversible.
   ii) Montrer que $I_n - A$ est inversible et que
   $$(I_n - A)^{-1} = I_n + A + A^2 + \ldots + A^{\ell-1}.$$
   iii) Montrer que la matrice suivante de $M_5(\mathbf{K})$ est inversible et calculer son inverse
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Pour toute matrice $A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbf{K})$, la *trace* de A est le nombre
   $$\mathrm{tr}(A) = A_{11} + \ldots + A_{nn} \in K.$$
   a) Montrer que pour toutes matrices $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a
   $$\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda \mathrm{tr}(A)\,,\ \mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B) \ \text{ et } \ \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$
   b) En déduire que pour toutes matrices $A \in M_n(\mathbf{K})$ et $P \in M_n(\mathbf{K})$ où P est inversible, on a $\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(A)$.
   c) Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in M_n(\mathbf{K})$ telles que $AB - BA = I_n$.

4. Considérer les systèmes d'équations linéaires suivants et décider quel système a une solution:
   $$\text{(a)} \begin{cases} -x + 3y + 4z &= 1 \\ \ \ x - \ \ y - 2z &= 1 \\ \ \ x - 2y - 3z &= 0 \end{cases}, \qquad \text{(b)} \begin{cases} x + y = 1 \\ x + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x + y + \ \ z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ -x - y + \ \ z = 3 \end{cases}$$

5. Préciser pour quelles valeurs des nombres réels a et b le système d'équations linéaires
   $$\begin{cases} x + \ \ ay + \ \ z &= 3 \\ x + 2ay + \ \ z &= 4 \\ x + \ \ \ \ y + bz &= 3 \end{cases}$$
   a zéro, exactement une ou une infinité de solutions.

6. Décider quelles matrices sont inversibles, et trouver l'inverse quand la matrice est inversible:
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Calculer $\det(A)$ et A^{-1} pour
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Soit a un nombre réel. Calculer $\det(A)$ pour
$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a^2 - a \\ 1 & a-1 & 3a-1 & a^2 - a \\ 0 & a & a & 0 \\ 1 & a & 3a-1 & 0 \end{pmatrix}.$$