DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 10 — 2002-2003

---

1. Soient E un espace euclidien de dimension finie et $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer :

   (a) $\mathrm{Ker}(f^*) = \mathrm{Im}(f)^\perp$; (b) $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(f)^\perp$.

2. Une matrice A de $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *positive* (resp. *strictement positive*), si A est symétrique et $(Ax, x) \geq 0$ (resp. $(Ax, x) > 0$) pour tout vecteur $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.
   Montrer pour $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$:

   (a) Si A est positive telle que $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors $A = 0$.

   (b) Si ${}^tBB - B\,{}^tB$ est positive, alors B est normale (c.à.d. ${}^tBB - B\,{}^tB = 0$).

   (c) Si A, B sont strictement positives, alors on a $\mathrm{tr}(AB) > 0$.

3. Soit E un espace euclidien de dimension finie. Soit f un endomorphisme symétrique de E et $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ ses valeurs propres. Montrer :

   (a) $\lambda_1 = \max\{(f(x), x) : \ x \in E, \ \|x\| = 1\}$;

   (b) $\lambda_n = \min\{(f(x), x) : \ x \in E, \ \|x\| = 1\}$.

4. Soient E un espace euclidien de dimension finie, $f \in \mathrm{End}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que f est une *similitude* de rapport λ si $\|f(x)\| = \lambda\|x\|$ pour tout $x \in E$.

   (a) Montrer que f est une similitude de rapport λ si et seulement si $(f(x), f(y)) = \lambda^2(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

   (b) Caractériser les similtudes par leurs matrices dans une base orthonormée.

   (c) Montrer que f est une similitude si et seulement si f est non nulle et conserve l'orthogonalité, c.à.d. pour tous $x, y \in E$, $x \perp y \Longrightarrow f(x) \perp f(y)$.