DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 11 — **2002-2003**

---

1. (*Composition de symétries*).

   Soit E un espace euclidien de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E.
   On note s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G.

   (a) Soit $F \perp G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F \oplus G)^\perp}$.

   (b) Soit $F \subset G$. Montrer que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F \oplus G^\perp}$.

2. (*Condition pour que deux symétries commutent*).

   Soient H, K deux hyperplans de E et s_H, s_K les symétries associées.
   Démontrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

3. (*En général, $F + F^\perp \neq E$*).

   Soit $E = C([0,1]; \mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(f \mid g) = \int_0^1 fg(t)\,dt$, et
   $F = \{f \in E \text{ tel que } f(0) = 0\}$. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

4. Soit E un espace euclidien de dimension finie et $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries de E. On considère un isomorphisme f de E tel que l'on ait $f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{O}(E)$ pour tout $g \in \mathrm{O}(E)$.

   (a) Soit $0 \neq x \in E$ et $H = \{x\}^\perp$ l'hyperplan orthogonal au vecteur x.
   Montrer que l'on a $(f(x), f(y)) = 0$ pour tout $y \in H$.

   (b) Montrer que f est une similitude.

5. (*Centre de* $\mathrm{O}(E)$).

   Soit E un espace euclidien de dimension finie et $\mathrm{O}(E)$ le groupe des isométries de E.
   Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ et s une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace H de E.

   (a) Montrer que $f \circ s \circ f^{-1}$ est aussi une symétrie orthogonale.
   Par rapport à quel sous-espace est-elle orthogonale ?

   (b) Soit $0 \neq x \in E$ et $H = \{x\}^\perp$.
   En déduire que f et s commutent si et seulement si x est vecteur propre de f.

   (c) On appelle $\{f \in \mathrm{O}(E) : \forall g \in \mathrm{O}(E),\ f \circ g = g \circ f\}$ le *centre* de $\mathrm{O}(E)$.
   Quel est le centre de $\mathrm{O}(E)$?

6. Soient E un espace euclidien de dimension finie et f une isométrie de E.
   On pose $f_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + \ldots + f^{n-1}\right)$ pour tout entier $n \geq 1$.

   (a) Soit $g = f - \mathrm{id}_E$. Montrer que l'on a $\mathrm{Ker}\, g = (\mathrm{Im}\, g)^\perp$.

   (b) Soit $x \in E$. On note y le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}\, g$.
   Montrer qu'il existe un vecteur $u \in E$ tel que on ait, pour tout $n \geq 1$,

   $$f_n(x) = y + \frac{1}{n}\left(f^n(u) - u\right).$$

   En déduire que l'on a $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = y$.