

DEUG MASS 2  
MATHÉMATIQUES

Feuille d'exercices 2

2002-2003

---

1. Pour quelles valeurs de  $a \in \mathbf{K}$  le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = b_1 \\ x_2 + x_3 & = b_2 \\ x_3 + x_4 & = b_3 \\ ax_1 & + x_4 = b_4 \end{cases}$$

a-t-il exactement une solution quelque soient  $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbf{K}$  ?

2. Déterminer toutes les solutions du système d'équations linéaires suivant:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Supposons  $n$  supérieur ou égal à 2. Montrer que si  $A, B \in M_n(\mathbf{K})$  sont des matrices inversibles, l'on a les égalités suivantes:

(a)  $\text{Com}(AB) = \text{Com}(A)\text{Com}(B)$

(b)  $\det \text{Com}(A) = (\det A)^{n-1}$

(c)  $\text{Com}(\text{Com } A) = (\det A)^{n-2}A$

(d)  $\text{Com } A^{-1} = (\text{Com } A)^{-1}$ .

4. Parmi les sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}^3$ , préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels:

(a)  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

(b)  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 0\}$

(c)  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0\}$

(d)  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 = 0 \text{ ou } x_2 - x_3 = 0\}$

(e)  $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Q}\}$

5. Considérer les sous-ensembles suivants de  $M_n(\mathbf{K})$  et décider lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $M_n(\mathbf{K})$ :

(a)  $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid {}^t A = -A\}$

(b)  $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid A \text{ est inversible}\}$

(c)  $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid \det(A) = 0\}$

(d)  $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid \exists \ell \in \mathbb{N} \text{ tel que } A^\ell = 0\}$

(e)  $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$

(f)  $\{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid A \text{ est une matrice triangulaire supérieure}\}$