DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 3 — 2002-2003

---

1. Lesquels des exemples $(E, \oplus, *)$ suivants sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels:

   (a) $E := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \quad x \oplus y := xy, \quad \lambda * x := x^\lambda \quad (x > 0,\, y > 0,\, \lambda \in \mathbb{R})$.

   (b) $E := \mathbb{R}, \quad x \oplus y := x + y - 1, \quad \lambda * x := \lambda x - \lambda + 1 \quad (x, y, \lambda \in \mathbb{R})$.

2. Soient F et G des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

   Montrer que si $F \cup G = E$, alors $F = E$ ou $G = E$.

3. Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
   A-t-on $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$?

4. Dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}^{2n}$, on considère les sous-ensembles:

   $$F := \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{K}^{2n} \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0\}$$
   $$G := \{(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbf{K}^{2n} \mid x_i = x_{n+i} \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}.$$

   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{K}^{2n}$ et en donner les dimensions et des bases. Montrer que $F \oplus G = \mathbf{K}^{2n}$.

5. Considérer les sous-espaces vectoriels suivants de $\mathbf{K}^n$:

   $$F := \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0\}$$
   $$G := \{(\alpha, \ldots, \alpha) \in \mathbf{K}^n \mid \alpha \in \mathbf{K}\}.$$

   Trouver une base de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

6. Soient

   $$\mathrm{Sym}_n(\mathbf{K}) = \{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid {}^tA = A\}, \quad \mathrm{Asym}_n(\mathbf{K}) = \{A \in M_n(\mathbf{K}) \mid {}^tA = -A\}.$$

   (a) Montrer que $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{Asym}_n(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbf{K})$. Calculer leurs dimensions.

   (b) Montrer que $M_n(\mathbf{K}) = \mathrm{Sym}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathrm{Asym}_n(\mathbf{K})$.

7. Soients E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs linéairement indépendants de E.

   (a) On pose $v_1 = x_1$, $v_2 = x_1 + x_2, \ldots, v_n = x_1 + \cdots + x_n$. Montrer que les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont linéairement indépendants.

   (b) On pose $v_1 = x_1 + x_2$, $v_2 = x_2 + x_3, \ldots, v_n = x_n + x_1$. Les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont-ils linéairement indépendants ?

8. Soient $x_1, \ldots, x_r$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $r \leq n$, tels que $x_i \neq 0$ et $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour $i \neq j$, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$. Montrer que $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont linéairement indépendants.

9. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des vecteurs linéairement indépendants de E.

   (a) Soit $x \in E$. Montrer que les vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_n, x$ sont linéairement dépendants si et seulement si x n'appartient pas au sous-espace vectoriel engendré par $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

   (b) Soit $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ où $\lambda_i \in \mathbf{K}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Montrer que les vecteurs $x_1 - x, x_2 - x, \ldots, x_n - x$ sont linéairement dépendants si et seulement si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

10. Soient

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que (x_1, x_2, x_3, x_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Echanger successivement chaque fois un des vecteurs x_1, x_2, x_3, x_4 contre x, et examiner dans chacun des quatre cas si la propriété de la base est conservé.