DEUG MASS 2
Mathématiques

Feuille d'exercices 4 — 2002-2003

---

1. Soient E et F des K-espaces vectoriels et $f\colon\ E \to F$ une application linéaire. Soient $v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de E.

   a) Montrer que si les vecteurs $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ sont linéairement indépendants, les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ sont linéairement indépendants.

   b) Montrer que, dans le cas où f est injective, la réciproque de a) est vraie.
   Montrer, par un exemple, qu'elle est fausse en général.

   c) Montrer que, dans le cas où f est surjective, si les vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une partie génératrice de E, les vecteurs $f(v_1), \ldots, f(v_m)$ forment une partie génératrice de F.

2. Supposons E de dimension finie. Soient $u, v \in E$ tels que $u \neq 0$ et $v \neq 0$.

   a) Montrer qu'il existe un isomorphisme $f\colon\ E \to E$ tel que $f(u) = v$.

   b) Montrer qu'il existe une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que $v_1 + \cdots + v_n = v$.

3. Soient E un K-espace vectoriel et $f\colon\ E \to E$ une application linéaire. Soit $x \in E$ un vecteur tel que $f^{\ell-1}(x) \neq 0$ et $f^{\ell}(x) = 0$ pour un entier $\ell \geq 1$. Montrer que les vecteurs $x, f(x), \ldots, f^{\ell-1}(x)$ sont linéairement indépendants.

4. Soient E un K-espace vectoriel et $f\colon\ E \to E$ une application linéaire telle que $f^2 = \mathrm{id}$. Montrer que

   $$E_1 = \{x \in E \mid f(x) = x\} \quad \text{et} \quad E_2 = \{x \in E \mid f(x) = -x\}$$

   sont des sous-espaces vectoriels de E et que l'on a $E = E_1 \oplus E_2$.

5. Soient E un K-espace vectoriel et $P\colon\ E \to E$ une projection, c.a.d. une application linéaire telle que $P^2 = P$.

   a) Montrer que $E = \mathrm{Ker}P \oplus \mathrm{Im}P$ et $P|\mathrm{Im}P = \mathrm{id}$.

   b) Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Considérer

   $$P\colon\ E \to E, \quad Pf(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right).$$

   i) Montrer que P est une projection, et trouver $\mathrm{Ker}P$ et $\mathrm{Im}P$.
   ii) Décomposer $f(x) = e^x$ comme $f = g + h$ avec $f \in \mathrm{Ker}P$ et $g \in \mathrm{im}P$.